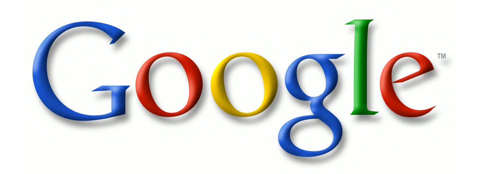
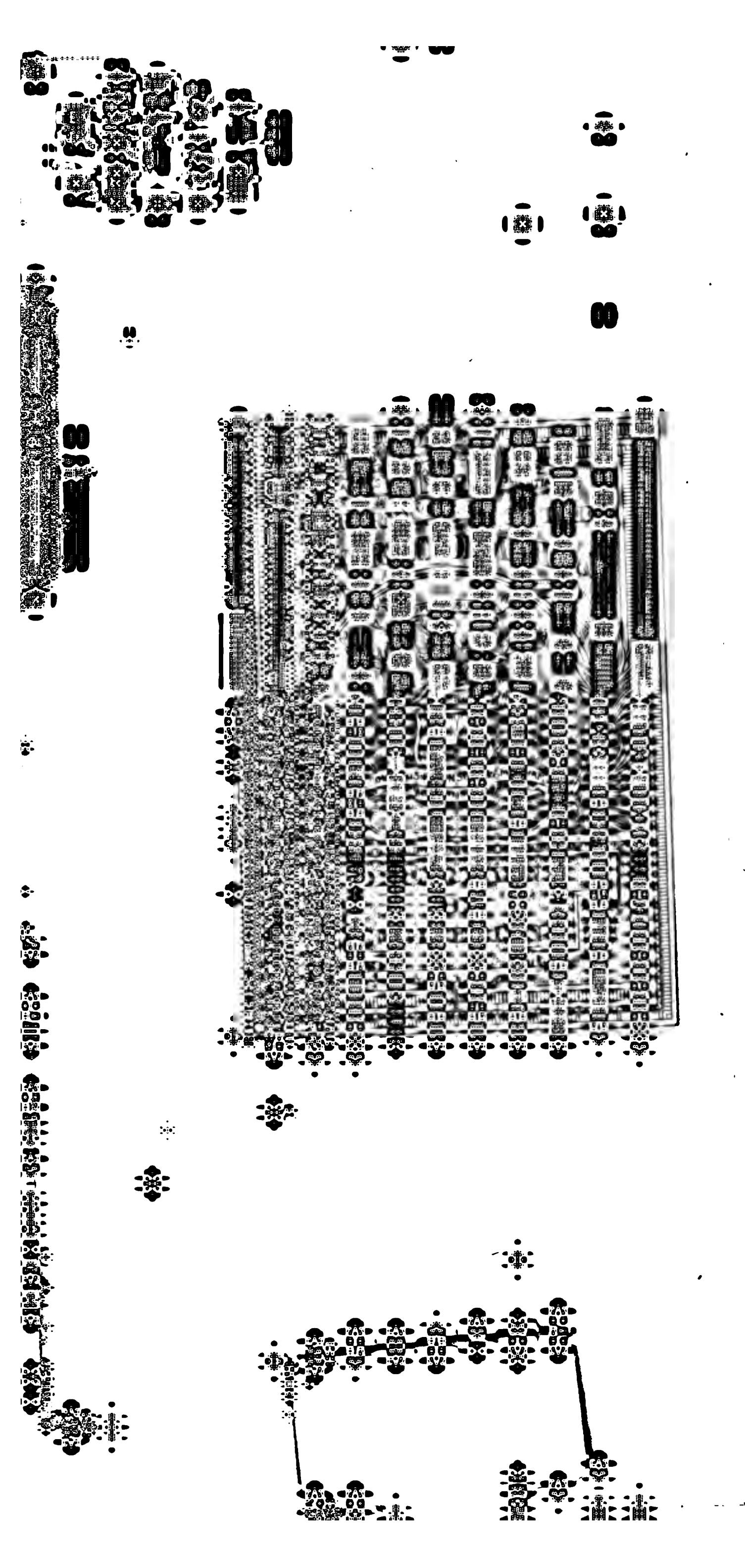
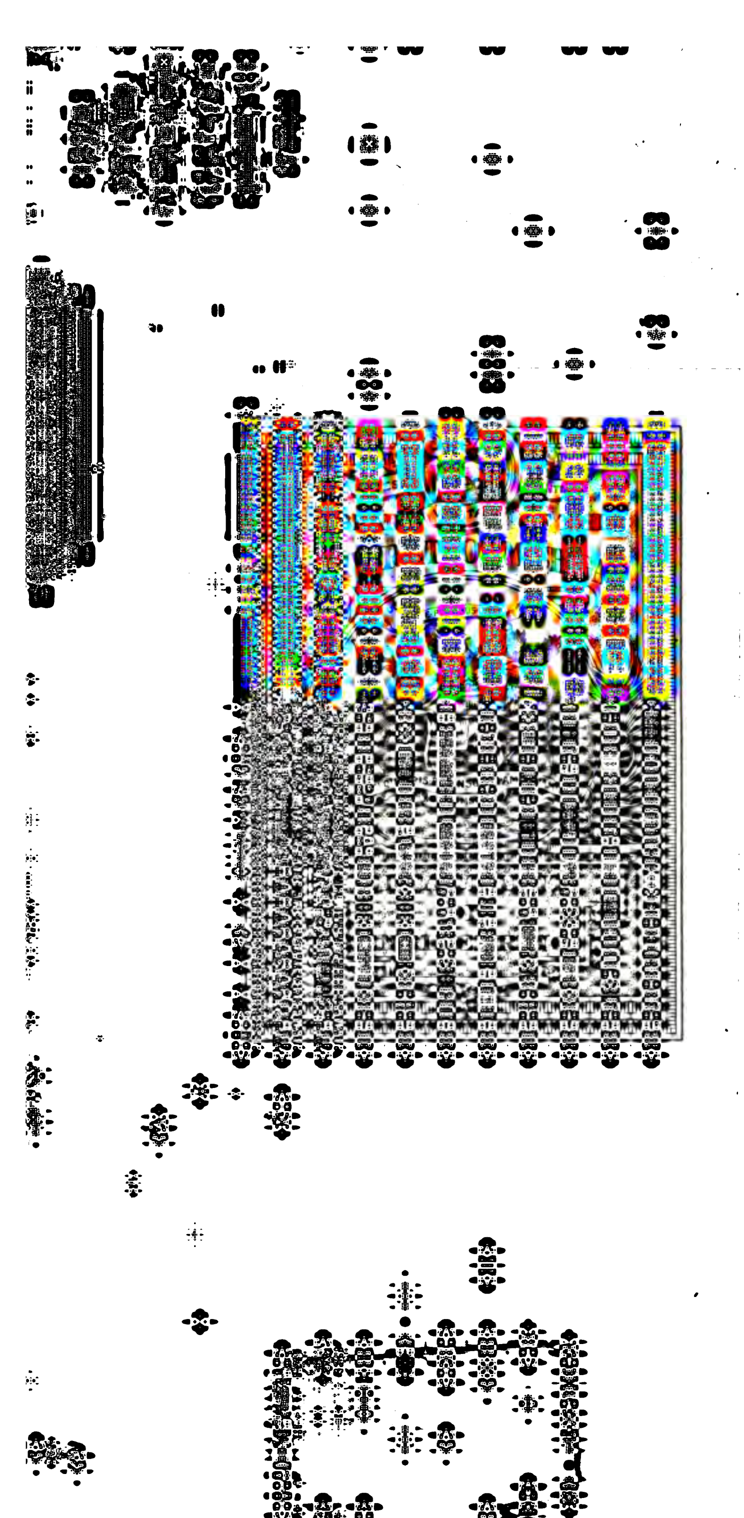






HYDROMECHANIK

VON

D^R. M. RÜHLMANN,
PROFESSOR IN HANNOVER.

ZWEITES HEFT.

HYDRODYNAMIK.

LEIPZIG.
ARNOLD'ISCHE BUCHHANDLUNG.
1854.

Schrift und Druck von Fr. Culemann in Hannover.

Dritte Abtheilung.

Hydrodynamik.

---

§. 65.

Die technische Hydrodynamik beschäftigt sich mit der Aufgabe, die Gesetze der Bewegung des Wassers, von Erfahrungen (Versuchsresultaten) geleitet und unterstützt, mit Hülfe mechanischer Principien in mathematischen Ausdrücken darzustellen.

Hierbei wird das Wasser entweder bei seinem Ausflusse aus Gefäßöffnungen betrachtet, oder bei seiner Bewegung in Canälen (Flüssen) und Röhren, oder endlich wirkend durch Druck oder Stoß. Die technische Hydrodynamik kann sonach aus drei Hauptabtheilungen bestehend angenommen werden.

Anmerkung. Seit dem Anfange des vorigen Jahrhunderts hat man sich vergeblich bemüht, eine allgemeine Theorie der Bewegung flüssiger Massen aufzustellen. Zwar haben die ausgezeichneten Meister der Mathematik, wie D'Alembert, Euler, Lagrange etc. hierzu die sinnreichsten, analytischen Arbeiten, keineswegs aber Resultate geliefert, welche der Erfahrung entsprechend und der Praxis von irgend erheblichem Nutzen gewesen wären. Der Grund dieser Thatsache scheint indeß weniger in einer Unzulänglichkeit der Mathematik, als vielmehr in unserer bereits §. 1 erwähnten Unbekanntschaft mit der Natur der flüssigen Massen zu liegen.

In dem Gebiete der Technik hat man daher auch diesen Weg fast ganz verlassen und einen anderen eingeschlagen, welcher darin besteht, die Rechnungen überall durch Beobachtungen nicht bloß zu modificiren, sondern sogar zu begründen. Begreiflicher Weise gelten die meisten der hierbei gewonnenen Theorieen nur innerhalb gewisser Grenzen, oder können nur in solchen Fällen mit Sicherheit

benutzt werden, wo die Umstände ungefähr dieselben sind, unter welchen die Beobachtungen angestellt wurden; indeß verdankt man dieser Richtung bereits mehrfache Entdeckungen und viele, für die Praxis höchst brauchbare mathematische Formeln. *)

Erster Abschnitt.

Ausfluss des Wassers aus Gefässmündungen.

Erstes Kapitel.

Ausfluss des Wassers aus horizontalen Bodenöffnungen bei constanter Druckhöhe.

§. 66.

Um wenigstens in einigen Fällen die Gesetze des Wasserausflusses aus Gefäßen theoretisch entwickeln und hierzu die Anwendung mechanischer Principien (Princip d'Alembert's und Princip von der Erhaltung lebendiger Kräfte) überhaupt möglich machen zu können, nimmt man zu Hypothesen seine Zuflucht, die jedoch immer noch mit Vorsicht gebraucht und die damit gewonnenen Resultate entsprechenden Correctionen unterworfen werden müssen, um sie mit der Erfahrung in Uebereinstimmung zu bringen.

1. Zuerst denkt man sich die flüssige Masse durch Ebenen in auf der Gefäßaxe normale Schichten zerlegt und nimmt an, daß die Wassertheilchen einer und derselben Schicht zu einer gemeinschaftlichen, parallelen Bewegung in Richtungen angeregt werden, welche rechtwinklig auf den Schnittflächen stehen, folglich auch die Geschwindigkeiten für alle Puncte desselben Querschnittes gleich groß sind. Dieser Satz wird gewöhnlich die Hypothese vom Parallelismus der Schichten genannt.

---

*) Eine höchst lesenswerthe, interessante Beleuchtung dieses Gegenstandes, findet sich unter der Rubrik „Ueber den wissenschaftlichen Zustand der Hydrotechnik", in Hagen's „Beschreibung neuer Wasserwerke". Königsberg 1826.

2. Wird vorausgesetzt, daß jedes Wasserelement derselben Schicht, im Sinne der Bewegung, überall gleiche Pressungen erfährt.

3. Nimmt man an, daß die verschiedenen Flüssigkeitselemente überall fortwährend ihren Zusammenhang behalten, d. h. daß sich nirgends Unterbrechungen oder leere Räume in der Masse vorfinden, so daß die letztere stets dasselbe äußere Volumen behält, welche Aenderung der Form sie auch erfahren mag. In derselben Zeit fließen daher durch die verschiedenen Querschnitte desselben Gefäßes gleiche Wasservolumen. Dieser Satz ist unter dem Namen der Hypothese von der Continuität der Flüssigkeit bekannt.

Ueberdies wird (zunächst) vorausgesetzt, daß das fließende Wasser nirgends durch die vorhandenen Gefäßwände einen Widerstand erfährt, und die Gefäße selbst im Inneren weder Ecken noch Vorsprünge zeigen, um plötzliche Geschwindigkeitsänderungen, so lange das Gegentheil nicht ausdrücklich bemerkt wird, als nicht vorhanden annehmen zu können.

Bezeichnen sonach A und a zwei ganz verschiedene normale Querschnitte desselben Gefäßes und V, v die respectiven Geschwindigkeiten der sie ganz ausfüllenden Wasserschichten, so hat man für eine beliebige Zeit τ nach dem Vorstehenden

$$AV\tau = av\tau \text{ oder } AV = av$$

oder endlich:

$$V : v = a : A, \text{ d. h.}$$

die Geschwindigkeiten stehen in umgekehrten Verhältnissen der betreffenden Querschnitte.

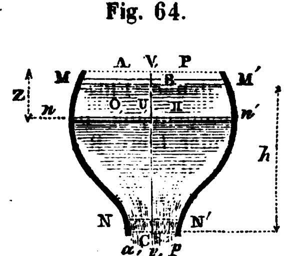
§. 67.

Ausflußgeschwindigkeit.

Außer den vorstehenden allgemeinen Annahmen werde jetzt noch vorausgesetzt, daß die Bewegung bereits den Beharrungszustand (Geodynamik §. 31, Zusatz 3) erreicht hat, die Flüssigkeitselemente eines und desselben Querschnittes in verschiedenen Zeitabschnitten dieselbe Geschwindigkeit besitzen, endlich auch das Wasser alle Gefäßquerschnitte überall ausfüllt. Letztere Forderung setzt namentlich ganz besonders gestaltete Mündungen der Gefäße voraus.

Hiernach läßt sich mit Hülfe des Principes von der Erhaltung der lebendigen Kräfte (§. 31 Geodynamik) die Geschwindigkeit herleiten, womit das Wasser aus der horizontalen Mündung NN' eines beliebig gestalteten Gefäßes MN' mit verticaler Axe BC strömt.

Fig. 64.



Es sei A der Querschnitt der Oberfläche MM' des Gefäßes, V die Geschwindigkeit, womit sich in der betreffenden Schicht das Wasser fortwährend ersetzt. Der Querschnitt der Mündung sei $= a$, die Ausflußgeschwindigkeit daselbst $= v$ und endlich der Verticalabstand des Mündungsquerschnittes vom horizontalen Oberwasserspiegel die sogenannte Druckhöhe $= h$.

Ueberdies werde vorerst die Flüssigkeit als allein der Schwerkraftswirkung unterworfen gedacht.

Ein Massenelement m, was in der sehr kleinen Zeit τ durch das Gefäß strömt, läßt sich ausdrücken, wenn γ und g die früheren Bedeutungen behalten, durch

$$m = \frac{\gamma A V \tau}{g} = \frac{\gamma a v \tau}{g}.$$

Die lebendige Kraft, welche der Schicht MM' inne wohnt, ist hiernach:

$\frac{1}{2} m V^2$, oder weil, nach §. 66, $V = \frac{va}{A}$ ist, auch $\frac{1}{2} m \left(\frac{av}{A}\right)^2$.

Die lebendige Kraft, welche diese Schicht erlangt hat, wenn sie nach NN' gekommen ist, beträgt: $\frac{1}{2} m v^2$.

Daher ist auch die beim Niedergange dieser Schicht von MM' nach NN' gewonnene lebendige Kraft:

$$\frac{1}{2} m \left[v^2 - \left(\frac{av}{A}\right)^2\right].$$

Da nun die Flüssigkeit allein der Schwerkraft unterworfen vorausgesetzt wurde, so wird die mechanische Arbeit, welche jenen Zuwachs an lebendiger Kraft erzeugte, sein: gmh und daher nach dem genannten Principe (§. 31 Geodynamik) folgen:

$$\frac{1}{2} m \left[v^2 - \left(\frac{av}{A}\right)^2\right] = mgh,$$

woraus sich endlich ergiebt:

$$\text{I.} \quad v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{a^2}{A^2}}}.$$

Ist a im Verhältniß A sehr klein, mindestens $\frac{a}{A} < \frac{1}{10}$, so kann man $\frac{a^2}{A^2}$ gegen 1 vernachlässigen und setzen:

$$\text{II. } v = \sqrt{2gh}.$$

Dieser Ausdruck entspricht genau der Endgeschwindigkeit (VI. §. 14 Geodynamik), welche ein im luftleeren Raume aus dem Ruhezustande durch die Höhe h fallender Körper erlangt haben würde.

Wird die zu einer andern Druckhöhe h_1 gehörige Geschwindigkeit mit v_1 bezeichnet, so erhält man nach II:

$$\text{III. } v : v_1 = \sqrt{h} : \sqrt{h_1},$$

ein Satz, welcher leicht in Worten auszudrücken ist.

Anmerkung. Letztere Proportion wurde zuerst 1644 von Toricelli nachgewiesen, während die Formeln I. und II. zur direkten Berechnung der Geschwindigkeit zuerst von Johann Bernoulli (1732) und von Daniel Bernoulli (1738) abgeleitet wurden.

Zusatz 1. Vorstehende Formeln geben die Ausflußgeschwindigkeiten etwas zu groß an, was seinen Grund in der unbeachtet gelassenen Reibung des Wassers an den Gefäßwänden und in der Klebrigkeit (viscosité) oder nicht völligen Flüssigkeit desselben hat. Daher wird auch die wirkliche Geschwindigkeit, womit Wasser aus horizontalen Bodenöffnungen in dünner Wand ausströmt, mittels obiger Formeln erhalten, wenn man dieselben mit einer Zahl = ψ multiplicirt, welche kleiner als 1 ist und die man den Geschwindigkeitscoefficienten nennt.*)

Im Allgemeinen scheint dieser Coefficient, unter sonst gleichen Umständen, mit der Druckhöhe zu wachsen (?), indem sich aus Weisbach's **) Versuchen folgende Zusammenstellung machen läßt:

h	1 Fuß	5′	10′	390′
ψ	0,958	0,969	0,975	0,988

Hiernach würde auch beim Ausflusse durch Mündungen in der dünnen Wand ein Verlust an Geschwindigkeit und somit auch an lebendiger Kraft oder an mechanischer Arbeit stattfinden.

*) Die Nothwendigkeit der Einführung eines allgemeinen Geschwindigkeitscoefficienten hat zuerst Bidone (Turiner Mémoiren T. XL. §. 19) nachgewiesen. In Deutschland ist dieser Gegenstand jedoch zuerst von Weisbach zur Geltung gebracht worden.

**) Ing. Mech. Bd. I. §. 344 und Freiberger Ingenieur Bd. I. S. 558.

Zusatz 2. Für $a = A$ wird $v = \infty$, was jedoch kein Widerspruch ist, sobald man beachtet, daß dann wegen $V = \frac{av}{A}$ auch $V = \infty$ sein muß.

Beispiel. Mit welcher Geschwindigkeit strömt Wasser aus einer horizontalen Bodenöffnung in dünner Wand von $a = 0^{\square m},02$ Inhalt, bei einer constanten Druckhöhe von $h = 4^{m},0$, wenn der horizontale Oberwasserspiegel $A = 0^{m},20$ ist und $g = 9,8088$ angenommen wird?

Auflösung. Man erhält ohne Weiteres:

$$v = \sqrt{\frac{2.4.9,8088}{1 - \frac{1}{100}}} = 8^{m},903.$$

Vernachlässigt man $\frac{a}{A}$ im Nenner, so folgt

$$v = 8^{m},858.$$

Wird endlich der betreffende Geschwindigkeitscoefficient $= 0,97$ gesetzt, so ergiebt sich die wirkliche Geschwindigkeit

im ersten Falle: $0,97 . 8^{m},903 = 8^{m},636$,
im zweiten Falle: $0,97 . 8,858 = 8^{m}592$.

§. 68.

In vorstehendem §. ist angenommen, daß die Flüssigkeit an der Oberfläche und Ausflußmündung gleichen Druck erfährt. Ist dies nicht der Fall, wird vielmehr die Einheit der Oberfläche mit einer Kraft P und die der Ausflußöffnung eben so mit einer Kraft p gedrückt, wobei erstere im Sinne der Bewegung, letztere entgegengesetzt wirkt, so gestalten sich die betreffenden Rechnungen folgendermaßen.

Die Größe der Arbeiten, welche während der Zeit τ von P und p der Flüssigkeit eingeprägt werden, sind nämlich

$$PAV\tau - pav\tau,$$

oder, weil $m = \frac{\gamma AV\tau}{g} = \frac{\gamma av\tau}{g}$ ist:

$$PAV\tau = \frac{gmP}{\gamma} \text{ und}$$

$$-pav\tau = -\frac{gmp}{\gamma}.$$

Daher wird die Gleichung des §. 67 zu:

$$1)\ \tfrac{1}{2} mv^2 \left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right) = gmh + \frac{gmP}{\gamma} - \frac{gmp}{\gamma},$$

so wie hieraus, wenn man zugleich den Geschwindigkeitscoefficienten ψ einführt:

$$v = \psi \sqrt{\frac{2g\left[h + \frac{P-p}{\gamma}\right]}{1 - \frac{a^2}{A^2}}}.$$

Beispiel. Die horizontale Ausflußöffnung eines mit Wasser gefüllten Gefäßes mündet in einen luftverdünnten Raum, woselbst eine Pressung von $\frac{1}{10}$ Atmosphäre statt hat, während die Oberfläche durch die umgebende, äußere Luft pr. Quadratmeter mit 10336 Kilogramm gepreßt wird. Man soll die Größe der Ausflußgeschwindigkeit für den Fall berechnen, daß die constante Druckhöhe $h = 1^m,0$, der Coefficient $\psi = 0,97$ ist, zugleich aber um den Einfluß des Werthes $\frac{a}{A}$, wo $a = 0^{\square m},01$ ist, beurtheilen zu können, auf einander folgend $\frac{a}{A} = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{25}$ und Null setzen.

Auflösung:

$$v = 0,97 \sqrt{\frac{2.9,8088\left[1 + \frac{10336(1-0,1)}{1000}\right]}{1 - \frac{1}{25}}} = 14^m,0734 \text{ für } \frac{a}{A} = \frac{1}{5}$$

eben so

$$v = 13^m,8595 \text{ für } \frac{a}{A} = \frac{1}{10};$$

$$v = 13,8011 \quad " \quad \frac{a}{A} = \frac{1}{25};$$

$$v = 13,790 \quad " \quad \frac{a}{A} = \text{Null}.$$

§. 69.

Hydraulischer Druck.

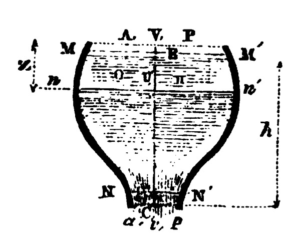
Aus (1) des vorigen §. folgt noch:

$$\frac{p}{\gamma} = h + \frac{P}{\gamma} - \frac{v^2}{2g}\left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right),$$

oder auch wegen $\frac{a}{A} = \frac{V}{v}$:

$$(1) \quad \frac{p}{\gamma} = h + \frac{P}{\gamma} - \left(\frac{v^2}{2g} - \frac{V^2}{2g}\right).$$

Fig. 64.



Für eine Schicht nn', im Innern der Flüssigkeit um Z vom Oberwasserspiegel abstehend, deren Flächeninhalt O ist, woselbst die Wassertheilchen die Geschwindigkeit U besitzen und in ihr die Pressung Π stattfindet, wird sonach sein:

$$(2)\quad \frac{\Pi}{\gamma} = Z + \frac{P}{\gamma} - \left(\frac{U^2}{2g} - \frac{V^2}{2g}\right).$$

Hierbei sind $\frac{p}{\gamma}$ und $\frac{\Pi}{\gamma}$, nach §. 14, Zusatz 2, Wassersäulen, welche die betreffenden Drücke messen.

Die Ausdrücke (1) und (2) lehren, daß der Druck der bewegten Flüssigkeit auf die Wände des einschließenden Gefäßes von dem Drucke einer gleichen ruhenden Flüssigkeit verschieden ist, weshalb man ersteren den hydraulischen Druck, im Gegensatze zu dem letzteren, dem hydrostatischen, nennt.

Ueberhaupt ist der hydraulische Druck an einer beliebigen Wandstelle des Gefäßes gleich dem hydrostatischen Drucke an derselben Stelle, letzteren vermindert um die Differenz der Druckhöhen eben daselbst und an der Oberfläche der im Gefäße befindlichen Flüssigkeit.

Je schneller also das Wasser durch einen bestimmten Querschnitt strömt, um so weniger Druck übt dasselbe gegen die Wände des betreffenden Gefäßes aus.

Diese bereits von Daniel Bernoulli *) aufgefundenen Sätze, stimmen auch ganz gut mit betreffenden Versuchen überein.

Zusatz 1. Aus der Gleichung (2) folgt überdies, da $U = \frac{av}{O}$ und $V = \frac{av}{A}$ ist,

$$(3)\quad \frac{\Pi}{\gamma} = Z + \frac{P}{\gamma} - \frac{v^2}{2g}\left(\frac{a^2}{O^2} - \frac{a^2}{A^2}\right).$$

In den Fällen, wo $\frac{a}{A} < \frac{1}{25}$ ist und $P = p$ in die Geschwindigkeitsformel, §. 68, gesetzt werden kann, was fast immer der Fall ist, wenn das Gefäß überall von atmosphärischer Luft

*) Hydraulico-statico (Hydronamica, Sectio XII.) und Karsten, Lehrbegriff der gesammten Mathematik. (Die Hydraulik.) 5. Theil. §. 220.

umgeben wird, läßt sich als hinreichend genau, wegen $\frac{v^2}{2g} = h$, setzen:

$$(4)\quad \frac{\Pi}{\gamma} = \frac{P}{\gamma} + z - h\,\frac{a^2}{O^2}.$$

Hier bezeichnet nun $\frac{P}{\gamma}$ die den Atmosphärendruck messende Wassersäule $b = 10^m,336$, so daß überhaupt z und O veränderliche Größen sind. Allgemein für $\frac{\Pi}{\gamma}$ kann man daher schreiben:

$$\frac{\Pi}{\gamma} = b \pm \chi,$$

wenn

$$z - h\,\frac{a^2}{O^2} = \pm \chi \text{ gesetzt wird.}$$

Ist wie bereits oben bemerkt das fragliche Wassergefäß überall von atmosphärischer Luft umgeben, so erfährt eine Wandstelle desselben im Abstande z vom Oberwasserspiegel, von Innen nach Außen, einen Druck, welcher gleich $b \pm \chi$ ist, dagegen einen Druck von Außen nach Innen $= b$, so daß der resultirende oder wirkliche Druck beträgt:

$$\chi = z - h\,\frac{a^2}{O^2}.$$

Wie leicht einzusehen, sind nun in Bezug auf diesen Druck folgende drei Fälle zu unterscheiden:

1. Es ist der Druck χ positiv, d. h. von Innen nach Außen gerichtet, wenn $z > h\,\frac{a^2}{O^2}$, oder $O^2 > \frac{h}{z}\,a^2$ ist.

2. Der fragliche Druck ist Null, sobald $z = h\,\frac{a^2}{O^2}$ oder $O^2 = \frac{a^2 h}{z}$.

3. Negativ ist endlich dieser Druck, d. h. er verwandelt sich in ein Saugen, wenn

$$z < h\,\frac{a^2}{O^2} \text{ oder } O^2 < \frac{a^2 h}{z} \text{ ist.}$$

In letzterem Falle ist zugleich der Querschnitt O die Stelle wo sich das voranlaufende Wasser von dem nachfolgenden trennen wird, oder es wird sich das Wasser daselbst von der Wand losreißen und innerhalb der Röhre einen freien Strahl bilden.

[illegible] as Wassergefäß
[illegible] on Behälter *MM*
[illegible] e $= l$, Fig. 65,
[illegible] ung mit einer
[illegible] Röhre, deren
[illegible] her Querschnitt
[illegible] nge $= \lambda$ ist, so
[illegible] wegen $O = a$,
[illegible] $= \lambda + l$:

[illegible] $- (\lambda + l)$, d. i.

[illegible] $= b - \lambda$.

[illegible] eßende Wasser
[illegible] die Röhre λ
[illegible] eine größere
[illegible] sser von dem
[illegible] ein luftleerer
[illegible] der Röhre eine
[illegible] leibt oder von
[illegible] rd das Wasser
[illegible] das durch *BD*
[illegible] wieder erhöht,
[illegible] Geschwindigkeit
[illegible] als entspräche
[illegible]

[illegible] estimmten Um-
[illegible] einer verticalen
[illegible] sich das soge-
[illegible] 6.

[illegible] zuströmenden
[illegible] in der Röhre
[illegible] her die Röhre,
[illegible] rch die in die
[illegible] augt. Unter der
[illegible] Platte *k*, wo-
[illegible] übrigens abge-
[illegible]

[illegible] bei den soge-
[illegible]

[illegible] giebt Chaptal
[illegible] in den Annales
[illegible]

... wird, während
... eßen kann.

... en Druckhöhen
... uadratmeter, in
... g $AO = Z = 0^m,4$
... erspiegel und in
... Quadratmeter
... $= 0^m,90$ Entfer-
... en, wenn der
... $M' = A = 0,2$
... e Abflußöffnung
... adratmeter und
... Druckhöhe MN
... ist. Außerdem
... auf welche
... Flüssigkeit in
... erhebt, deren
... mit der atmo-
... das untere F
... icht EF commu-

nicirt, sowie endlich anzugeben ist, wie hoch das Wasser aus einem besonderen Gefäße J in einer Röhre HD aufsteigen wird, welche an der Stelle D in das Innere des Gefäßes mündet. Der Geschwindigkeitscoefficient φ werde $= 1$ gesetzt.

Auflösung. Zuerst erhält man für die Geschwindigkeit $= v$ der Bodenmündung NN':

$$v = \sqrt{\frac{2.9{,}8088.1{,}25}{1-(\frac{1}{8})^2}} = 4^m{,}991.$$

Sodann ergiebt sich mittels Formel (4) die hydraulische Druckhöhe im Innern von DC:

$$\frac{\Pi}{\gamma} = 0{,}4 + 10{,}336 - \frac{(4{,}9911)^2}{2.9{,}8088}\left[\left(\frac{0{,}025}{0{,}030}\right)^2 - \left(\frac{0{,}025}{0{,}200}\right)^2\right] = 9^m{,}910.$$

Daher die Druckdifferenz, weil 10,336 dem Drucke der äußeren Luft an derselben Stelle entspricht:

$$9^m{,}910 - 10{,}336 = -0^m{,}426.$$

Der resultirende Druck in DC ist folglich negativ, so daß $0^m{,}426$ zugleich die Höhe HL ist, bis zu welcher sich das Wasser in der Röhre HD erhebt.

Für die hydraulische Druckhöhe in der Schicht EF ergiebt sich eben so:

$$\frac{\Pi'}{\gamma} = 0{,}9 + 10{,}336 - \frac{(4{,}9911)^2}{2.9{,}8088}\left[\left(\frac{0{,}025}{0{,}150}\right)^2 - \left(\frac{0{,}025}{0{,}200}\right)^2\right] = 11^m{,}221.$$

Dem resultirenden Drucke an der Wandstelle F entspricht folglich die Höhe:

$$11{,}221 - 10{,}336 = 0^m{,}885,$$

welches zugleich diejenige ist, zu welcher das Wasser in der Röhre FG empor steigt.

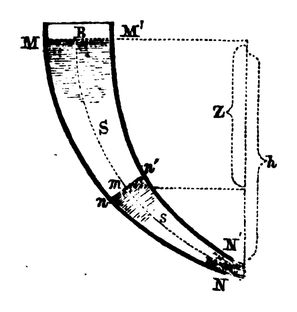
Bei betreffenden Versuchen werden sich, der passiven Widerstände, Reibungen, Krümmungen etc. wegen, die hier berechneten Höhen etwas geringer herausstellen.

[§. 70.]

Ausfluß aus Gefäßen mit nicht verticaler Axe, wenn der Beharrungszustand noch nicht eingetreten ist.

Hierzu denken wir uns das Gefäß als eine beliebig gekrümmte aber enge Röhre MN, Fig. 68, damit die Hypothese vom Parallelismus

Fig. 68.

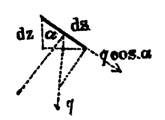


der Schichten noch Anwendung finden, d. h. angenommen werden kann, daß sich die Wassertheilchen in Schichten fortbewegen, welche auf der Röhrenaxe normal stehen; alle anderen bisherigen Voraussetzungen mögen unverändert Geltung behalten. In gleicher Weise mögen die Bezeichnungen dieselben bleiben, nur werde für den beliebigen Querschnitt nn' in der Entfernung z vom Oberwasserspiegel der Flächeninhalt $= \omega$, die Geschwindigkeit der Wassertheilchen daselbst $= u$, die ganze Axenlänge der Röhre BC mit S, und die eines beliebigen Theiles wie mC aber $= s$ gesetzt.

Das Gewicht q einer unendlich dünnen Schicht nn' von der Länge ds in der Axenrichtung gemessen ist zunächst:

$$q = \gamma\omega ds, \text{ so wie deren Masse: } m = \frac{\gamma\omega ds}{g}.$$

Fig. 69.



Sodann aber ergiebt sich für die in der Axenrichtung der Röhre wirkende Kraft, wenn α den Winkel bezeichnet, welchen das Element ds mit der Verticalen einschließt und mit Bezug auf Fig. 68:

$$q\cos.\alpha = \gamma\omega ds \,.\, \cos.\alpha = \gamma\omega ds \frac{dz}{ds} = \gamma\omega dz.$$

Ferner ist die wirklich zu Stande gekommene Acceleration: $\frac{du}{dt}$ und die ihr entsprechende Bewegungsgröße:

$$m\frac{du}{dt} = \frac{\gamma\omega ds}{g} \cdot \frac{du}{dt}.$$

Sonach ist die im Sinne des d'Alembert'schen Principes (§. 29 Geodynamik) verlorne Bewegungsgröße der betreffenden Schicht:

$$\frac{\gamma}{g}\,\omega\left(gdz - \frac{du}{dt}ds\right),$$

so wie die verlorne mechanische Arbeit, wenn man den letzteren Werth mit den in der Zeit dt zurückgelegten Wege udt multiplicirt:

$$\frac{\gamma}{g}\,\omega\left(gdz - \frac{du}{dt}ds\right)udt.$$

Endlich ergiebt sich hiernach die in der ganzen Ausdehnung S der Röhre verlorne mechanische Arbeit, wenn noch beachtet wird, daß $AVdt = \omega udt = avdt$ constante Producte sind:

$$(1)\quad \frac{\gamma}{g}\,\omega u dt \left(\int_0^h g dz - \int_0^S \frac{du}{dt}\,ds\right).$$

Die gleichzeitigen Arbeiten, welche den Pressungen P und p entsprechen, sind:

$$\sum_{\Pi=p}^{\Pi=P} \omega\,\Pi\, udt = \omega udt\,(P-p),$$

weshalb überhaupt statt (1) entsprechend dem angeführten Principe erhalten wird:

$$0=\omega udt\,(P-p)+\frac{\gamma}{g}\,\omega udt\left(\int_0^h gdz-\int_0^S \frac{du}{dt}\,ds\right), \text{ oder}$$

$$(2)\quad 0=P-p+\gamma h-\frac{\gamma}{g}\int_0^S \frac{du}{dt}\,ds.$$

Es bleibt zur vollständigen Auflösung der vorliegenden Aufgabe, nämlich die Ausflußgeschwindigkeit für den Fall des noch nicht eingetretenen Beharrungszustandes anzugeben, nur noch die nähere Bestimmung von $\frac{du}{dt}\,ds$ übrig, was auf nachstehende Weise geschehen kann.

Man beachte, daß aus $u=\frac{av}{\omega}$, wo v und ω als von einander unabhängige Variabeln zu betrachten sind, durch Differenziation erhalten wird:

$$du=\left(\frac{du}{dv}\right)dv+\left(\frac{du}{d\omega}\right)d\omega, \text{ oder}$$

$$\text{weil } \frac{du}{dv}=\frac{a}{\omega},\quad \frac{du}{d\omega}=-\frac{av}{\omega^2} \text{ ist, auch}$$

$$du=\frac{a}{\omega}\,dv-av\,\frac{d\omega}{\omega^2}.$$

Es ist aber v eine Function von t, ω eine Function von s und s wieder eine Function von t, folglich auch

$$du=\frac{a}{\omega}\,\frac{dv}{dt}\,dt-\frac{av}{\omega^2}\,\frac{d\omega}{ds}\,\frac{ds}{dt}\,dt, \text{ oder}$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{a}{\omega}\,\frac{dv}{dt}-\frac{av}{\omega^2}\,\frac{d\omega}{ds}\,\frac{ds}{dt}.$$

Beachtet man nun noch, daß $\frac{ds}{dt}=u=\frac{av}{\omega}$ ist, so wird letztere Gleichung zu:

$$\frac{du}{dt} = \frac{a}{\omega}\frac{dv}{dt} - \frac{a^2v^2}{\omega^3}\frac{d\omega}{ds}, \text{ oder}$$

$$\frac{du}{dt} ds = a \frac{dv}{dt}\frac{ds}{\omega} - a^2v^2\frac{d\omega}{\omega^3}$$

Ueberhaupt erhält man nunmehr aus (2)

$$0 = (P-p) + \gamma h - \frac{\gamma}{g} a \frac{dv}{dt}\int_0^S \frac{ds}{\omega} + \frac{\gamma}{g} a^2v^2 \int_A^a \frac{d\omega}{\omega^3}, \text{ d. i.}$$

wenn die Integration im letzten Gliede ausgeführt und das von der Gefäßform abhängige Integral $\int_0^S \frac{ds}{\omega}$ mit N bezeichnet wird:

$$0 = (P-p) + \gamma h - \frac{\gamma a}{g}\frac{dv}{dt} N + \frac{\gamma}{g}\frac{a^2v^2}{2}\left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{a^2}\right),$$

oder

$$(3) \quad 0 = 2g\left[\frac{P-p}{\gamma} + h\right] - 2aN\frac{dv}{dt} - v^2\left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right).$$

Zur Abkürzung werde jetzt

$$2g\left[\frac{P-p}{\gamma} + h\right] = D,$$

$$2aN = B \text{ und } 1 - \frac{a^2}{A^2} = C \text{ gesetzt,}$$

woraus folgt:

$$0 = D - B\frac{dv}{dt} - Cv^2$$

und weiter sich ergiebt

$$dt = \frac{B.dv}{D - Cv^2}.$$

Durch Integration findet man ferner: *)

$$t = \frac{B}{2\sqrt{Dc}} \, lgnt \, \frac{\sqrt{D} + v\sqrt{C}}{\sqrt{D} - v\sqrt{C}}$$

---

*) $\int \frac{dx}{a - bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \, lgnt \, \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}} + \text{const.}$

und hieraus endlich:

$$v = \sqrt{\frac{D}{C}} \; \frac{-1 + e^{\frac{2\sqrt{DC}}{B} . t}}{1 + e^{\frac{2\sqrt{BC}}{D} . t}}.$$

Uebersteigt wie gewöhnlich in der Praxis der Oberflächenquerschnitt des Wassers den Mündungsquerschnitt sehr bedeutend, so wächst v rasch mit der Zeit t. Nach verhältnißmäßig kurzer Zeit werden daher die Potenzen von e so groß, daß man die Einheiten im vorstehenden Werthe von v gegen die Potenzen von e vernachlässigen, also schreiben kann

$$v = \sqrt{\frac{D}{C}}, \text{ d. i.}$$

$$v = \sqrt{\frac{2g\left(h + \frac{P-p}{\gamma}\right)}{1 - \frac{a^2}{A^2}}}.$$

Derselbe Werth wäre sofort erhalten worden, hätte man in (3) $\frac{dv}{dt}$ = Null also den Beharrungszustand als bereits eingetreten vorausgesetzt, was ganz der Ableitung desselben Ausdruckes in §. 67 entspricht.

§. 71.

Wassermenge.

Um die aus einer horizontalen Gefäßmündung während einer Zeit t fließende Wassermenge zu berechnen, denkt man sich den Weg vt, welchen ein Wasserelement während dieser Zeit durchlaufen würde, als Höhe eines auf der Gefäßmündung normal stehenden Prismas, dessen cubischer Inhalt sonach die fragliche Wassermenge ausdrücken wird.

Bezeichnet demnach Q die pr. Secunde ausfließende Wassermenge in Cubikeinheiten, so ist

$$Qt = avt,$$

$$Q = av, \text{ oder}$$

$$\text{I.} \quad Q = \psi a \sqrt{\frac{2g\left(h + \frac{P-p}{\gamma}\right)}{1 - \frac{a^2}{A^2}}}.$$

Ist $P = p$ und $\frac{a}{A} < \frac{1}{25}$, so darf man setzen:

$$\text{II.}\quad Q = \psi a \sqrt{2gh}.$$

Zusatz 1. Unter Beibehaltung von ψ und a erhält man für eine andere Wassermenge Q', wenn h' die entsprechende Druckhöhe ist, die Proportion:

$$Q : Q' = \sqrt{h} : \sqrt{h'} = v : v'.$$

Zur Vergleichung dieses Satzes mit der Erfahrung können Versuche Bossut's *) dienen, der bei nachbemerkten Druckhöhen aus Kreismündungen von 1 Zoll Durchmesser pr. Minute an Wassermengen in pariser Cubikzollen beobachtete:

Druckhöhen.	Wassermengen.
1 Fuß	2722
2 –	3846
3 –	4710
4 –	5436

Nach vorstehender Proportion müßte daher sein:

$$2722 : 3846 = \sqrt{1} : \sqrt{2}$$
$$3846 : 4710 = \sqrt{2} : \sqrt{3}$$
$$4710 : 5436 = \sqrt{3} : \sqrt{4}$$
$$2722 : 5436 = \sqrt{1} : \sqrt{4}$$

etc. etc.

was genau genug der Fall ist.

§. 72.

Contraction des ausfließenden Wasserstrahles.

Die Gleichungen I. und II. des vorigen §. geben nur unter ganz besonderen Umständen die wirkliche (effective) pr. Secunde aus einer Gefäßmündung fließende Wassermasse, während im Allgemeinen die betreffenden Rechnungsresultate viel größere Werthe liefern, als die wirklich beobachteten Ausflußmengen, wenn auch das Verhältniß dieser Wassermassen mit der

*) Traité d'hydrodynamique §. 513.

theoretischen Bestimmung nicht im Widerspruche steht, wie vorher gezeigt wurde. Der Grund ersterer Erscheinung liegt hauptsächlich darin, daß nahe zu der Mündung (noch innerhalb des Gefäßes) der Parallelismus der Schichten gänzlich aufhört, weil besonders die seitwärts der Mündung zuströmenden Wassertheilchen eine Ablenkung des Strahles von der ursprünglichen Richtung erzeugen und hierdurch, so wie durch (wahrscheinlich) noch andere Ursachen veranlaßt, eine Zusammenziehung des Strahles (contractio venae) bewirken, wodurch die Mündung nur zum Theil oder gar nicht vom durchfließenden Wasser ausgefüllt wird. Etwas vor der Mündung, außerhalb des Gefäßes, findet die kleinste Zusammenziehung (wenigstens meistentheils) statt und daselbst ist auch der Parallelismus der Schichten wiederhergestellt, weshalb man diesen Querschnitt an die Stelle des Mündungsquerschnittes in die Formeln einführt. Der echte Bruch $= \alpha$, welcher dabei angiebt, um wie viel der Strahlquerschnitt in der kleinsten Zusammenziehung kleiner als der Mündungsquerschnitt ist, oder womit die letztere Mündung multiplicirt werden muß, um den Strahlquerschnitt zu erhalten, wird der Contractionscoefficient genannt.

Man erhält daher für die aus horizontaler Bodenmündung vom Querschnitt a pr. Secunde fließende Wassermasse $= Q$:

$$Q = \psi \alpha a v.$$

Dabei stellt man das Product $\psi \,.\, \alpha$ noch durch eine einzige Zahl dar, die wir mit μ bezeichnen und den Ausflußcoefficienten nennen wollen, so daß folgt:

$$\mu = \psi \,.\, \alpha.$$

Der Ausflußcoefficient ist sonach das Product aus Geschwindigkeits- und Contractionscoefficient.

Zusatz 1. Im Allgemeinen ist die Contraction ausfließender Wasserstrahlen von sehr vielen Umständen abhängig, die leider lange noch nicht so vollständig bekannt sind, als dies die technische (practische) Hydrodynamik wünschenswerth machte. Hier werde das Hauptsächlichste angeführt, wodurch die Contraction modificirt werden kann.

a. Hängt die Contraction von der Größe der Druckhöhe und der Mündungsfläche ab (auch ob letztere einspringende Winkel besitzt oder nicht) und wird geringer (die Ausflußmenge größer) je kleiner die Mündungen und je niedriger die Druckhöhen sind.

b. Ferner ist die Contraction davon abhängig, ob die Mündung unmittelbar in die Gefäßwand gemacht (en mince paroi)

ist *), oder ob dieselbe durch kurze (cylindrische, conische oder conoidische) innere oder äußere Ansatzröhren gebildet wird. Am kleinsten wird die Contraction, wenn ein derartiges außerhalb der Wandmündung angesetztes Rohr die Gestalt des zusammengezogenen Wasserstrahles hat (siehe nächstfolgenden Zusatz), dagegen wird die Contraction am Größten, wenn dies kurze Ansatzrohr cylindrisch, nach Innen, wie Fig. 70, gerichtet ist und der Ausfluß so bewirkt wird, daß das Wasser die Röhre nirgends ausfüllt.

3. Ist die Contraction von der Fläche abhängig, worin sich die Mündung befindet, und zwar wird sie geringer wenn die Fläche nach Innen zu concav, größer wenn sie convex ist.

4. Ferner hängt die Contraction davon ab, ob die Mündung im Gefäße bis an eine oder mehrere Seitenwände reicht, oder inwendig mit Blech etc. eingefaßt (armirt) ist. Sodann ist die Contraction an den betreffenden Mündungsstellen aufgehoben und man nennt die ganze Erscheinung die partielle Contraction, im Gegensatze zu der, welche an allen Stellen der Mündung statt hat und deshalb die vollständige Contraction genannt wird. Unter allen Umständen wird die Ausflußmenge vergrößert, sobald eine partielle Contraction auftritt.

5. Endlich ist die Contraction noch davon abhängig, ob das Wasser mit großer oder kleiner Geschwindigkeit vor der Ausflußmündung ankommt, was sich im Allgemeinen wiederum darnach richtet, ob der Mündungsinhalt in Beziehung auf die Gefäßwand oder auf dem Querschnitt des Gefäßes beträchtlich oder gering ist.

Befindet sich das Wasser vor der Ausflußmündung beinah in Ruhe, so heißt die dann stattfindende Contraction eine vollkommene, während sie unvollkommen genannt wird, wenn das Wasser mit beträchtlicher Geschwindigkeit vor der Mündung anlangt. Unter sonst gleichen Umständen wird durch das Auftreten der unvollkommenen Contraction die Ausflußmenge vergrößert.

6. Schließlich hängt die Contraction noch davon ab, ob der Strahl nach Verlassen der Mündung ungehindert in die freie Luft tritt, oder ob sich vor der Mündung, und zwar unterhalb oder seitwärts derselben, Platten oder Flächen finden, an welche sich das Wasser zum Theil hängen und in seiner Bewegung verzögert werden kann, wie solches namentlich bei den Schützenöffnungen der Wasserräder der Fall ist.

7. Unter allen Umständen lehren die bis jetzt zur Ermittelung der Contractions- und Ausfluß-Coefficienten angestellten

*) Ob diese Wand selbst dünn oder dick ist.

[illegible] 0,5 und 1,0
[illegible] einer Mündung
[illegible] tere findet sich
[illegible] kurzen Ansatz-
[illegible] 71, welche
[illegible] mmengezogenen

[illegible] Contractions-
[illegible] directe Messung
[illegible] flußcoefficienten
[illegible] irter Gefäße.
[illegible] in Bezug auf
[illegible] n Fragen einige
[illegible] kreisförmigen
[illegible] denmündung in
[illegible] er Contraction,
[illegible] ***) mit.
[illegible] n Platte ange-
[illegible] 11 Fuß 8 Zoll
[illegible] 58 pariser Fuß):

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	α	ψ
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,666	0,926
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,659	0,937
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,6658	0,924

[illegible] 1766, pag. 579.)
[illegible] §. 20.)
[illegible] s der Hydraulik.
[illegible]
[illegible] rsuche von Zim-
[illegible] Erfahrung XVII.)
[illegible] Mechanik und
[illegible])
[illegible] Ingenieur. Bd. 1.
[illegible]
[illegible] §. 487 u. §. 488.

Als Mittelwerth könnte man hiernach für horizontale Bodenöffnungen in dünner Wand, den Contractionscoefficienten

$$\alpha = 0{,}666\ldots = \tfrac{2}{3},$$

den Ausflußcoefficienten $\mu = 0{,}617$ und

den Geschwindigkeitscoefficienten $\psi = \frac{\mu}{\alpha} = 0{,}925$

in Rechnung bringen.

Andere Versuchsresultate *) lieferten

$$\alpha = 0{,}646,\ \mu = 0{,}6216 \text{ und folglich } \psi = 0{,}962.$$

Annäherungsweise und für viele practische Fälle hinreichend genau läßt sich auch nach obiger Tabelle die Form des zusammengezogenen Strahles dadurch bestimmen, daß man das Verhältniß der Mündung zur kleinsten Strahldicke, zur Entfernung der letzteren, wie 10 : 8 : 5 setzt, wonach sich auch der Krümmungshalbmesser *Oa* der Begrenzungscurve *ab* des Gonoides *abcd* zu 13 ergiebt, wenn man anders die Curve *ac* als einen Kreisbogen betrachtet.

Fig. 71.

Zusatz 3. Aus dem Vorstehenden ergiebt sich überdies der höchst wichtige Satz, **daß in allen Fällen, wo man eine Contraction des Wasserstrahles zu erwarten hat, die Fläche der Mündung** a, **durch welche das Wasser läuft, durch den Querschnitt** αa **der größten Zusammenziehung in den betreffenden Formeln ersetzt werden muß.**

---

*) Newton fand (1714) zuerst durch directe Messung (jedoch unrichtig): $d:\delta:e = \frac{5}{8}'' : \frac{21}{40}'' : \frac{1}{2}'' = 25:21:20$, also $\alpha = \frac{441}{625} = 0{,}705$ oder circa: $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Poleni (1715) bestimmte den Ausflußcoefficienten zuerst richtig, nämlich $\mu = 0{,}6216$.

Borda (1766) fand durch sorgfältige directe Strahlmessung: $\alpha = \frac{100}{154\frac{7}{8}} = 0{,}646$.

Aus den Gleichungen für v und Π §. 68 und §. 69 wird sonach:

$$v = \sqrt{\frac{2g\left(h + \frac{P-p}{\gamma}\right)}{1 - \frac{\alpha^2 a^2}{A^2}}} \text{ und}$$

$$\frac{\Pi}{\gamma} = \frac{P}{\gamma} + z - \left(\frac{\alpha^2 a^2}{O^2} - \frac{\alpha^2 a^2}{A^2}\right),$$

Für die pr. Secunde aus der Mündung vom Querschnitte a ausfließende Wassermenge erhält man endlich:

$$Q = \mu a v = \mu a \sqrt{\frac{2g\left(h + \frac{P-p}{\gamma}\right)}{1 - \frac{\alpha^2 a^2}{A^2}}}$$

Beispiel. Welche Wassermenge fließt durch eine kreisförmige Bodenöffnung in dünner Wand bei vollkommener und vollständiger Contraction, wenn die constante Druckhöhe $h = 4^m,0$, der Mündungsquerschnitt $a = 0\square^m,02$, der Querschnitt des horizontalen Oberwasserspiegels $A = 0\square^m,80$ beträgt, der Contractionscoefficient $\alpha = 0,64$ und der Ausflußcoefficient $\mu = 0,62$, endlich der Druck P gegen den Oberwasserspiegel gleich dem p gegen die Mündung gesetzt werden kann.

Auflösung. Es ist $\sqrt{2g} = 4,4292$, $\sqrt{2gh} = 2.4,429 = 8^m,858$, folglich:

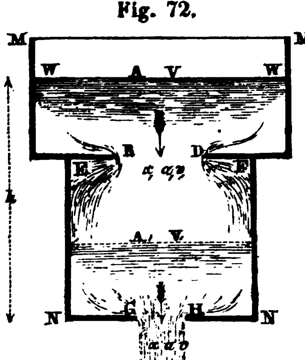
$$v = 8^m,911$$

und $Q = 0,111$ Cubikmeter pr. Secunde.

§. 73.

Verengungen und Erweiterungen im Innern der Gefäße.

Fig. 72.



Kommen im Innern eines Gefäßes, aus welchem Wasser strömt, dünne Scheidewände, wie in Fig. 72 vor, so treten plötzliche Geschwindigkeitsänderungen und somit Verluste an lebendiger Kraft ein, welche mehr oder weniger auf die Größe der Ausflußgeschwindigkeit und Wassermenge von Einfluß sind.

Die betreffenden Rechnungen in solchen Fällen haben, bei Anwendung des Principes der lebendigen Kraft, ganz einfach auf das

Carnot'sche Princip (§. 34 Geodynamik) Rücksicht zu nehmen, sind aber sonst den vorhergeführten ganz gleich.

Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen, sei jetzt α_1 der Contractionscoefficient für die Mündung BD, a_1 der Querschnitt der letzteren und v_1 die Geschwindigkeit daselbst. Das Gefäß EN habe überall den Querschnitt A_1 und die Schicht EF in demselben besitze die Geschwindigkeit $= V_1$. Die Pressungen in A und a mögen gleich groß sein.

Zuerst werde sodann bemerkt, daß hier

$$AV = \alpha_1 a_1 v_1 = A_1 V_1 = \alpha a v, \text{ oder}$$

$$v_1 = \frac{\alpha a}{\alpha_1 a_1} v \text{ und } V_1 = \frac{\alpha a v}{A_1} \text{ ist.}$$

Wegen des plötzlichen Ueberganges der Bewegung aus dem Querschnitt BD in den Querschnitt EF entsteht ein Geschwindigkeitsverlust:

$$v_1 - V_1 = \frac{\alpha a}{\alpha_1 a_1} v - \frac{\alpha a}{A_1} v$$

und daher, zufolge des Carnot'schen Satzes, ein Verlust an lebendiger Kraft:

$$\frac{m}{2}(v_1 - V_1)^2 = \frac{mv^2}{n}\left(\frac{1}{\alpha_1^2 a_1^2} - \frac{1}{A_1^2}\right)\alpha^2 a^2.$$

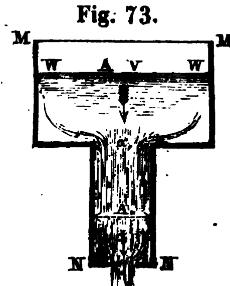
So wie nach §. 34 Geodynamik

$$\tfrac{1}{2} m (v^2 - V^2) + \tfrac{1}{2} mn^2 \left(\frac{1}{\alpha_1 a_1} - \frac{1}{A_1}\right)^2 \alpha^2 a^2 = gmh, \text{ oder}$$

$$v^2 \left\{ \left(1 - \frac{\alpha^2 a^2}{A^2}\right) + \alpha^2 a^2 \left(\frac{1}{\alpha_1 a_1} - \frac{1}{A_1}\right)^2 \right\} = 2gh,$$

so wie

Fig. 73.



$$\text{I. } v = \sqrt{\frac{2gh}{\left(1 - \frac{\alpha^2 a^2}{A^2}\right) + \alpha^2 a^2 \left(\frac{1}{\alpha_1 a_1} - \frac{1}{A_1}\right)^2}}$$

Für den Fall, daß das Gefäß die Form wie Fig. 73 besitzt, also $a_1 = A_1$ ist, wird aus I.:

$$\text{II. } v = \sqrt{\frac{2gh}{\left(1 - \frac{\alpha^2 a^2}{A^2}\right) + \frac{\alpha^2 a^2}{A_1^2}\left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2}}$$

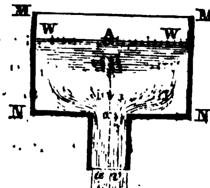


Fig. 74.

Nimmt endlich das Gefäß die Gestalt von Fig. 74 an, d. h. wird $a = A_1$, $\alpha = 1$, folglich:

$$\text{III. } v = \sqrt{\frac{2gh}{\left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right) + \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2}}$$

oder endlich, wenn $\frac{a}{A}$ recht klein,

$$\text{IV. } v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2}},$$

ein bereits von Borda für die Ausflußgeschwindigkeit bei kurzen cylindrischen Ansatzröhren gefundener Ausdruck.

Für $\alpha_1 = 0{,}64$ wird aus IV.

$$v = 0{,}872 \sqrt{2gh},$$

während der Mittelwerth aus den directen Versuchen giebt:

$$v = 0{,}816 \sqrt{2gh}.$$

Die Ursache der nicht völligen Uebereinstimmung liegt wahrscheinlich an der Nichtbeachtung des Anhängens (der Reibung) der flüssigen Massen an den Gefäßwänden, so wie überhaupt an unserer Nichtbekanntschaft mit der wahren Natur der flüssigen Massen.

Spätere Paragraphen werden weitere Erfahrungen und Aufschlüsse über diesen Gegenstand enthalten.

Zusatz 1. Mannigfache technische Anwendungen machen die Betrachtung einiger specieller Fälle besonders wünschenswerth.

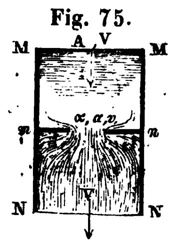


Fig. 75.

Bei einer Verengung, wie Fig. 75, erhält man, wenn die in der Figur eingeschriebenen Bezeichnungen angenommen werden, einen Verlust an lebendiger Kraft:

$$\tfrac{1}{2} m (v_1 - V)^2 = \tfrac{1}{2} m \left(\frac{A}{\alpha_1 a_1} - 1\right)^2 V^2.$$

Bezeichnet man mit z die Widerstandshöhe oder den Druckhöhenverlust, so giebt das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte:

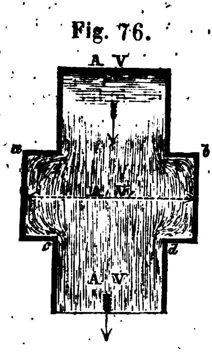
$$\tfrac{1}{2}m\left(\frac{A}{\alpha_1 a_1}-1\right)^2 V^2 = gmz, \text{ d. i.}$$

$$z=\left(\frac{A}{\alpha_1 a_1}-1\right)^2\frac{V^2}{2g}.$$

Wird hier $\left(\frac{A}{\alpha_1 a_1}-1\right)^2=\eta$ gesetzt und η (nach Weisbach) der Widerstandscoefficient genannt, so erhält man auch

$$z=\eta\,\frac{V^2}{2g}.$$

Fig. 76.



Zusatz 2. Hat das Gefäß die Form von Fig. 76 und machen wir von den eingeschriebenen Bezeichnungen Gebrauch, so erhält man für den Verlust an lebendiger Kraft, wegen der Erweiterung bei *ab*:

$$\tfrac{1}{2}m(V-V_1)^2=\tfrac{1}{2}mV^2\left(1-\frac{A}{A_1}\right)^2.$$

Ferner wegen der Verengung bei *cd*, einen Verlust:

$$\tfrac{1}{2}m\left(\frac{V}{\alpha}-V\right)^2=\tfrac{1}{2}mV^2\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2.$$

Und wenn z_1 den Verlust an Druckhöhe oder die sogenannte Widerstandshöhe bezeichnet, nach bekanntem Principe:

$$\tfrac{1}{2}mV^2\left(1-\frac{A}{A_1}\right)^2+\tfrac{1}{2}mV^2\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2=gmz_1, \text{ d. i.}$$

$$z_1=\frac{V^2}{2g}\left\{\left(1-\frac{A}{A_1}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2\right\}.$$

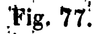
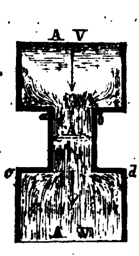


Fig. 77.



Zusatz 3. Besitzt endlich das Gefäß die Gestalt von Fig. 77, so wird bei *ab* ein Verlust an lebendiger Kraft entstehen, der gleich ist:

$$\tfrac{1}{2}m\left(\frac{V_1}{\alpha_1}-V_1\right)^2=\tfrac{1}{2}mV^2\left(\frac{1}{\alpha_1}\cdot\frac{A}{A_1}-\frac{A}{A_1}\right)^2$$

$$=\tfrac{1}{2}mV^2\left(\frac{1}{\alpha_1}-1\right)^2\left(\frac{A}{A_1}\right)^2;$$

ferner bei *cd* ein Verlust stattfinden, der gleich ist:

$$\tfrac{1}{2}m(V_1-V)^2=\tfrac{1}{2}mV^2\left(\frac{A}{A_1}-1\right)^2.$$

Bezeichnet daher jetzt z_2 die Widerstandshöhe, so folgt, wie vorher:

$$\tfrac{1}{2}mV^2\left(\frac{1}{\alpha_1}-1\right)^2\left(\frac{A}{A_1}\right)^2+\tfrac{1}{2}mV^2\left(\frac{A}{A_1}-1\right)^2=gmz_2,$$

woraus sich ergiebt:

$$z_2=\frac{V^2}{2g}\left\{\left(\frac{1}{\alpha_1}-1\right)^2\left(\frac{A}{A_1}\right)^2+\left(\frac{A}{A_1}-1\right)^2\right\}.$$

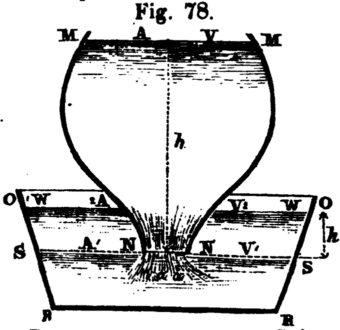
Anmerkung. Vorstehende Art und Weise, Verluste bei Verengungen und Erweiterungen, überhaupt zufolge plötzlicher Geschwindigkeitsänderungen abzuschätzen, hat zuerst Navier zur Geltung gebracht, obwohl gewichtige practische Autoritäten, wie D'Aubuisson, sich dagegen aussprechen. (D'Aubuisson, Traité d'hydraulique, §. 200.) Die Richtigkeit der Navier'schen Rechnungsweise ist indeß gegenwärtig durch noch nicht veröffentlichte Versuche Poncelet's (nach mündlichen Mittheilungen), so wie durch zahlreiche Versuche Weisbach's (Hydraulische Versuche. Erste Abtheil. p. 11 und 106) außer allen Zweifel gesetzt.

§. 74.

Ausfluß unter Wasser.

Es sei MN, Fig. 78, ein beliebiges Gefäß ohne innere Kanten und Vorsprünge, überall sanfte Uebergänge von einer Wandstelle zur anderen bildend, dessen Mündung NN auf eine Tiefe h_1 unter dem constanten Wasserspiegel OO in dem besonderen Gefäße RR taucht. Unmittelbar bei NN verbreite sich die ausströmende Flüssigkeit plötzlich in den Querschnitt SS, während die über NN vorhandene Druckhöhe h während des ganzen Ausflusses dieselbe bleibt, endlich die Pressungen auf den Spiegel bei MM und OO einander gleich sind.

Fig. 78.



Gebraucht man auch hier die in den Figuren eingeschriebenen Bezeichnungen, wobei dieselben Buchstaben die bereits früheren festgestellten Bedeutungen haben, so erhält man, ohne zuvörderst Rücksicht auf plötzliche Geschwindigkeitsänderungen zu nehmen, nach dem Principe von der Erhaltung der lebendigen Kräfte:

$$(1)\quad \tfrac{1}{2}m(V_2{}^2-V^2)=gm(h-h_1).$$

Wegen der plötzlichen Geschwindigkeitsänderung im Querschnitte SS hat man nach Carnot's Satze einen Verlust an lebendiger Kraft in Rechnung zu bringen, der gleich

$$\tfrac{1}{2} m (v - V_1)^2$$

beträgt. Deshalb folgt aber aus (1) nach §. 34 Geodynamik:

$$(2)\quad \tfrac{1}{2} m (V_2^2 - V^2) + \tfrac{1}{2} m (v - V_1)^2 = gm(h - h_1).$$

Nun ist aber $\alpha a v = AV = A_1 V_1 = A_2 V_2$, folglich:

$$V = \frac{\alpha a}{A} v,\ V_2 = \frac{\alpha a}{A_2} v,\ V_1 = \frac{\alpha a}{A_1} v$$

und daher aus (2)

$$\tfrac{1}{2} mv^2 \left(\frac{\alpha^2 a^2}{A_2^2} - \frac{\alpha^2 a^2}{A^2}\right) + \tfrac{1}{2} m \left(v - \frac{\alpha a}{A_1} v\right)^2 = gm(h - h_1), \text{ d. i.}$$

$$\text{I.}\quad v = \sqrt{\frac{2g(h - h_1)}{\alpha^2 a^2 \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A^2}\right) + \left(1 - \frac{\alpha a}{A_1}\right)^2}}.$$

Sind A, A_1 und A_2 recht groß und a recht klein, so folgt genau genug

$$\text{II.}\quad v = \sqrt{2g(h - h_1)}.$$

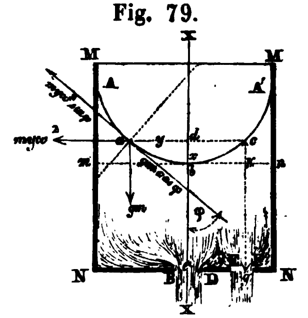
Anmerkung. Ueber die Größe der Ausflußcoefficienten für Mündungen, welche unter Wasser gesetzt sind, hat bis jetzt allein Weisbach Versuche angestellt (Hydraulische Versuche, Abtheilung 2, Seite 75 und 115), woraus hervorgeht, daß diese Coefficienten $1\frac{1}{8}$ Procent **kleiner** zu setzen sind, als beim Ausfluß in die freie Luft.

§. 75.

Ausfluß aus bewegten Gefäßen.

Es sei MN, Fig. 79, ein beliebiges Gefäß, welches sich in einer gleichförmigen Drehbewegung um die Verticalaxe XX und zwar mit der Winkelgeschwindigkeit ω befindet. An den Boden dieses Gefäßes sind sehr kleine Oeffnungen BD und EF angebracht, durch welche Wasser strömt, und zwar in der Art, daß die ausgeflossene Wassermenge stets durch einen genau eben so großen Zufluß ersetzt wird, die Druckhöhen über

Fig. 79.



den Mündungen also constant sind, endlich auch der Beharrungszustand des Ausflusses bereits eingetreten ist.

Aus §. 6, Zusatz 3, ist für diesen Fall bekannt, daß die Oberfläche der flüssigen Masse ein Paraboloid und die Durchschnittslinie *AabcA'* der Oberfläche mit einer Verticalebene eine gemeine Parabel bildet, deren Parameter $\frac{2g}{\omega^2}$ ist, wenn g wie bisher die Acceleration der Schwerkraft bezeichnet. *)

Die Gleichung der betreffenden Durchschnittslinie ist sonach:

$$y^2 = \frac{2g}{\omega^2} x$$

und woraus folgt:

$$\frac{(y\omega)^2}{2g} = x.$$

Da nun $y\omega$ die Umfangsgeschwindigkeit ist, welche ein Punct a der Oberfläche besitzt, der sich in einer Entfernung

*) Der Beweis hierzu läßt sich u. A. auch folgendermaßen führen. Es sei a ein beliebiger Punct der gedachten Durchschnittslinie, so wird ein daselbst befindliches Wasserelement $= m$ mit der Kraft gm vertical niederwärts, zufolge der Fliehkraft aber auch gleichzeitig mit der Kraft $my\omega^2$ radial auswärts getrieben, wenn y die Entfernung des fraglichen Elementes von der Drehaxe XX bezeichnet. Zerlegt man diese beiden Kräfte in Composanten, welche mit der Tangente des Curvenelementes bei a zusammenfallen, während andere in die Richtung der Normale zu liegen kommen, und beachtet, daß, für den Gleichgewichtszustand, letztere durch die Cohäsionskraft der Wasseroberfläche aufgehoben werden müssen, erstere sich aber das Gleichgewicht halten, so erhält man für letzteren Fall die Bedingungsgleichung:

$$(1) \quad my\omega \sin\varphi = gm \cos\varphi,$$

sobald φ den Winkel bezeichnet, welche die Tangente bei a mit der Verticale einschließt. Beachtet man nun, daß wenn $bd = x$ und $da = y$ die rechtwinkligen Coordinaten des Punctes a sind, $tg\varphi = \frac{dy}{dx}$ ist, so folgt aus (1)

$$\omega^2 y \, tg\varphi = g \text{ und } \omega^2 y \frac{dy}{dx} = g, \text{ oder } y dy = \frac{g}{\omega^2} . dx.$$

Integrirt man den letzteren Ausdruck, so ergiebt sich endlich:

$$y^2 = \frac{2g}{\omega^2} x.$$

$= y$ von der Drehaxe befindet, so erhält man auch, wenn diese Geschwindigkeit mit u bezeichnet wird:

$$\frac{u^2}{2g} = x.$$

Mit Hülfe dieses Ausdrucks wird man aber in den Stand gesetzt, anzugeben, um wie viel die Druckhöhen für Ausflußmündungen sich vergrößern, die nicht unmittelbar an der Drehaxe angebracht sind.

Bezeichnet man daher die Druckhöhe eb für die sehr kleine Mündung CD mit h, so erhält man für die Druckhöhe einer ebenfalls kleinen Mündung CF, die um eg von der Drehaxe absteht, mittels des obigen Ausdrucks

$$\overline{cg} = h + \overline{ck} = h + \frac{u^2}{2g},$$

wobei natürlich, wegen $\overline{cd} = \overline{eg}$ die Größe u die Umfangsgeschwindigkeit bezeichnet, welche die Mitte der Mündung $\overline{BE}$ bei gleichförmiger Umdrehung des Gefäßes um die Axe XX besitzt.

Aus der Mündung EF wird daher das Wasser mit einer Geschwindigkeit $= v$ fließen, welche ist:

$$\text{I.} \quad v = \psi \sqrt{2g\left(h + \frac{u^2}{2g}\right)} = \psi \sqrt{2g\left(h + \frac{y^2\omega^2}{2g}\right)};$$

aus der Mündung $\overline{BD}$ strömt dagegen das Wasser mit einer Geschwindigkeit:

$$\text{II.} \quad v = \psi \sqrt{2gh}.$$

Diese Formeln sind übrigens von der Gefäßform ganz unabhängig und sind selbst dann noch anwendbar, wenn sich unter b, in der Richtung vorn eine Wand befindet, welche das Zustandekommen des Paraboloids ganz verhindert, wie dies namentlich bei gewissen horizontalen Wasserrädern der Fall ist.

Beispiel. Welche Wassermenge fließt pr. Secunde aus einer Bodenöffnung EF von $a = 0^m,01$ Querschnitt in dünner Wand eines cylindrischen Gefäßes MN angebracht, welches sich gleichförmig um eine Verticalaxe dreht, wenn die constante Druckhöhe an der Stelle der Drehaxe gemessen $h = 4^m,0$ beträgt, die Mitte der Oeffnung EF um $0^m,2$ von der Drehaxe absteht, der Radius des kreisförmigen Querschnittes $bn = eN = 0^m,3$ ist und endlich pr. Minute 80 Umdrehungen erfolgen, der Ausflußcoefficient aber gleich 0,62 gesetzt werden kann.

Auflösung. Zuerst ist $\omega = \frac{2\pi.80}{60} = 8,3773$, folglich:

$$u = x\omega = 0,2 \times 8,3773 = 1,67546, \text{ daher:}$$

$$v = \sqrt{2.9,8088.4 + (1,67546)^2}$$

$$v = 9^m,01 \text{ und}$$

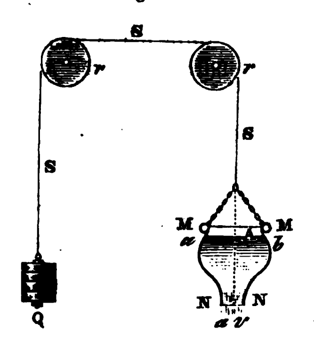
$$Q = 0,62.0,01.9,01 = 0,0558 \text{ Cub. Meter.}$$

[§. 76.]

Ausfluß durch ein Gefäß mit verticaler Axe, welches mit bestimmter Acceleration auf (oder abwärts) bewegt wird.

Es sei MN, Fig. 80, das bemerkte Gefäß, dessen Masse, einschließlich des darin befindlichen Wassers, am Ende einer Zeit t gleich m (also vorerst veränderlich) gesetzt werden mag, ferner sei M die Masse eines Gewichtes Q, wodurch eine Bewegung des Gefäßes MN vertical aufwärts veranlaßt wird, endlich V die Geschwindigkeit, welche am Ende der Zeit t, Gefäß wie Gewicht Q gemeinschaftlich besitzen. Die Masse der Rollen rr, über welche für den gedachten Zweck die völlig biegsame Schnur s geleitet ist, werde eben so vernachlässigt, wie die Reibung der Rollzapfen in ihren Lagern.

Fig. 80.



Am Ende der Zeit t wohnt daher dem bewegten Systeme eine lebendige Kraft inne, welche gleich ist:

$$\tfrac{1}{2}(M + m) V^2.$$

Der Zuwachs an lebendiger Kraft innerhalb eines Zeitelementes dt wird daher betragen:

$$d\left[(M+m)\frac{V^2}{2}\right] = (M+m)\, VdV + \tfrac{1}{2} V^2\, dm. \quad (1)$$

Die mechanische Arbeit, welche dem Systeme während derselben Zeit dt eingeprägt wird, beträgt ferner

$$(2) \quad g\,(M - m)\, Vdt;$$

daher nach dem Principe von der Erhaltung der lebendigen Kräfte, aus der Vergleichung von (1) und (2)

$$(M+m)\, VdV + \tfrac{1}{2} V^2 dm = g\,(M - m)\, Vdt,$$

woraus gefunden werden kann:

$$(3)\quad (M+m)\frac{dV}{dt} = g\,(M-m) + \tfrac{1}{2}\,\frac{dm}{dt}\,V.$$

Für die Bewegung des Wassers im Gefäße, bevor der Beharrungszustand eingetreten ist, hat man ferner nach (3) §. 70 für gegenwärtigen Fall, mit Beachtung von §. 23a (Zusatz) Geodynamik, wo hier $\frac{dV}{dt}$ die Bedeutung des dortigen G hat:

$$(4)\quad \left(g+\frac{dV}{dt}\right)z - a\frac{dv}{dt}\int_0^z \frac{dz}{\omega} - \frac{v^2}{2}\left(1-\frac{a^2}{A^2}\right) = 0.$$

Aus der Verbindung von (3) mit (4) erhält man leicht v und somit die Lösung der fraglichen Aufgabe, unter der Voraussetzung, daß die Druckhöhe z constant ist.

Ist bereits der Beharrungszustand des Wasserflusses eingetreten, so werden auch v und m constant, folglich dv und dm zu Null und daher aus (3) und (4):

$$(5)\quad \frac{dV}{dt} = g\,\frac{M-m}{M+m},$$

$$g\left\{1+\frac{M-m}{M+m}\right\}z = \frac{v^2}{2}\left(1-\frac{a^2}{A^2}\right) \text{ und}$$

$$v = \sqrt{2gz\,\frac{2M}{(M+m)\left(1-\frac{a^2}{A^2}\right)}}.$$

Wird das Gefäß mit unveränderlicher Geschwindigkeit, also gleichförmig aufwärts bewegt, so ist $\frac{dV}{dt}$ = Null zu setzen, in welchem Falle aus v wird:

$$v = \sqrt{2gz},$$

d. h. das Wasser strömt mit derselben Geschwindigkeit aus, als befände sich das Gefäß im Zustande der Ruhe. Für den Fall der Abwärtsbewegung des Gefäßes ist zufolge §. 23a (Zusatz) der Geodynamik die Acceleration $\frac{dV}{dt}$ negativ in Rechnung zu bringen.

Weiteres über den Ausfluß aus bewegten Gefäßen findet sich in folgenden Werken:

Bossut, Traité d'hydrodynamique (auch deutsch von Langsdorf). Tome premier. §. 296.

Scheffler, die Principien der Hydrostatik und Hydraulik, Bd. I., §. 126.

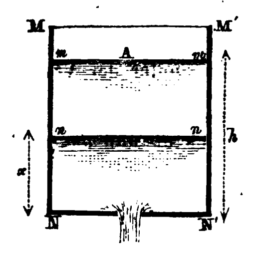
Zweites Kapitel.

Ausfluss aus horizontalen Bodenöffnungen bei veränderlicher Druckhöhe.

§. 77.

Es sei MN, Fig. 81, ein prismatisches Gefäß vom Querschnitte $= A$, welches vor Oeffnung der Bodenmündung vom Querschnitt a bis zu einer Höhe h mit Wasser gefüllt ist und daher ein Volumen des letzteren gleich Ah einschließt.

Fig. 81.



Da nun, dem Vorhergehenden entsprechend, angenommen werden kann, daß der Ausfluß des Wassers aus Bodenöffnungen, im Allgemeinen, den Gesetzen der gleichförmig veränderten Bewegung folgt *), so wird auch beim Leerlaufen bemerkten Gefäßes, d. h. beim Ausfließen des Volumens Ah, die Druckhöhe von h bis Null gleichförmig abnehmend betrachtet und die Zeit τ des Ausleerens wie nachstehend bestimmt werden können.

Bezeichnet v die Anfangsgeschwindigkeit der gedachten gleichförmig veränderten Bewegung, deren Endgeschwindigkeit $=$ Null ist, so ist der in der Zeit τ durchlaufene Weg (nach §. 11 Geodynamik)

$$s = \frac{v\tau}{2}.$$

Das während derselben Zeit durch den Querschnitt αa geflossene Volumen ist sonach $\alpha a s = \frac{\alpha a v \tau}{2}$, oder wenn a recht klein gegen A und $v = \psi\sqrt{2gh}$ gesetzt wird $\frac{\mu a \tau}{2}\sqrt{2gh}$, weshalb man überhaupt zur Bestimmung von τ die Gleichung erhält:

*) Etwaige Bedenken gegen diese Schlußfolge werden durch die Behandlung desselben Gegenstandes im folgenden Paragraphen erledigt, wobei wieder einmal erhellt, wie zur strengen und einsichtsvollen Behandlung gewisser Fragen der angewandten Mathematik, die Zuziehung der Differenzial- und Integralrechnung ganz unentbehrlich wird.

$$\frac{\frac{\mu a\tau}{2}\sqrt{2gh} = Ah}{\text{I.} \quad \tau = \frac{2A\sqrt{h}}{\mu a\sqrt{2g}}} \quad \text{, folglich}$$

Die Zeit τ, während welcher, unter Voraussetzung einer constanten Druckhöhe $= h$, das Volumen Ah aus demselben Gefäße geflossen sein würde, läßt sich ohne Weiteres durch die Gleichung finden:

$$\frac{\mu a\tau\sqrt{2gh} = Ah}{\tau = \frac{A\sqrt{h}}{\mu a\sqrt{2g}}} \quad \text{, also}$$

Die Zeit des Leerlaufens eines prismatischen Gefäßes ist hiernach genau doppelt so groß als die, welche erforderlich sein würde, wenn dasselbe Volumen bei constanter Druckhöhe herausfließen sollte.

Die Zeit τ', in welcher dasselbe Gefäß leer laufen würde, wenn x die anfängliche Druckhöhe gewesen wäre, ist nun nach I.:

$$\tau' = \frac{2A\sqrt{x}}{\mu a\sqrt{2g}};$$

daher auch die Zeit $t = \tau - \tau'$, während welcher der Wasserspiegel um $h - x$ sinkt:

$$\text{II.} \quad t = \frac{2A}{\mu a\sqrt{2g}}\left\{\sqrt{h} - \sqrt{x}\right\}.$$

Anmerkung. Die Formel I. enthält die Voraussetzung, daß der Ausfluß, vom Anfange bis zur völligen Entleerung des Gefäßes keine Störungen durch Wirbel und Einsenkung in der Mitte des niedergehenden Wasserspiegels erfährt, was in der Wirklichkeit nicht der Fall ist. Sobald vielmehr der Wasserspiegel bis zu einer gewissen Tiefe herabgesunken ist, bildet sich über der Mündung ein Trichter, der eine Verminderung der Druckhöhe zur Folge hat und der selbst dann nicht vollständig vermieden werden kann, wenn man auf der Oberfläche der Flüssigkeit, in geeigneter Weise, leichte Körper, z. B. eine Holzscheibe, schwimmen läßt, die sich mit dem Wasserspiegel gleichmäßig senken. Die Uebereinstimmung der Formel I. mit der Beobachtung ist aus diesen Gründen nicht so groß, wie dies bei der Formel II. der Fall ist, sobald die Senkung nicht zu tief herabgegangen ist, wie insbesondere aus nachfolgendem Beispiele und Erfahrungswerthem Bossut's hervorgeht. *)

*) Bossut, Traité d'hydrodynamique. Tome second. Nr. 560 u. 561.

Beispiel 1. In welcher Zeit senkt sich der Wasserspiegel in einem prismatischen Gefäße vom Querschnitte $= A = 9$ □ Fuß (Pariser Maß) Querschnitt, um 4 Fuße, wenn die anfängliche Druckhöhe 11 Fuß 8 Zoll beträgt und die Ausflußöffnung in dünner Wand ein Kreis von 2 Zoll Durchmesser ist?

Auflösung. Nimmt man mit Bossut $\mu = \frac{5}{8} = 0{,}625$ an, so findet sich nach II.:

$$t = \frac{2.9}{0{,}625 \,.\, 0{,}785 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \sqrt{2g}} \left(\sqrt{11{,}66} - \sqrt{7{,}66}\right)$$

und wenn (ebenfalls mit Bossut) $g = 30{,}1958$ Pariser Fuß gesetzt wird, folgt $t = 110{,}59$ Sec. $= 1$ Minute 50,59 Sec., während die Beobachtung $t = 52$ Sec. gab.

Diese mit noch anderen Beobachtungen desselben Experimentators stellen wir in folgender Tabelle zusammen, wobei bemerkt werden mag, daß die Uebereinstimmung noch größer gewesen wäre, hätte Bossut μ entsprechender angenommen.

Anfängliche Druckhöhe	Durchmesser der kreisförmigen Mündung	Senkung des Oberwasserspiegels	Beobachtete Zeit	Berechnete Zeit
11 Fuß 8 Zoll	1 Zoll	4 Fuß	7 Min. 25½ Sec.	7 Min. 22,36 S.
—	2 -	— -	1 - 52 -	1 - 50,59 -
—	1 -	9 -	20 - 24½ -	20 - 16,0 -
—	2 -	9 -	5 - 6 -	5 - 4,0 -

Beispiel 2. Zur Bestimmung des Ausflußcoefficienten in ebener dünner (Blech-) Wand bei vollständiger und vollkommner Contraction, maß und beobachtete Weisbach *) den Querschnitt des betreffenden prismatischen Gefäßes $A = 4388{,}7$ Quadratcentimeter, folglich $\frac{2A}{\sqrt{2g}} = 1981{,}7$, ($\sqrt{2g} = 4{,}4292$); ferner fand derselbe den Durchmesser der kreisförmigen Mündung $= 3{,}965$ Centimeter, daher den Inhalt der Mündung: 12,347 Quadratcentimeter, die anfängliche Druckhöhe $h = 0^m.7520$ und am Ende der Beobachtungszeit von $t = 63{,}5$ Secunden, die Druckhöhe $h_1 = 0{,}3940$. Es fragt sich, wie groß sich hiernach μ berechnet?

Auflösung. Unsere Formel II. giebt sofort:

$$\mu = \frac{2A(\sqrt{h} - \sqrt{h_1})}{at\sqrt{2g}}, \text{ d. i.}$$

$$\mu = \frac{1981{,}7}{12{,}347 . 63{,}5} \left(\sqrt{0{,}7520} - \sqrt{0{,}3940}\right),$$

$$\mu = 0{,}605.$$

---

*) Hydraulische Versuche, Abtheilung I, Seite 90.

[§. 78.]

Um die Aufgabe des Ausflusses bei veränderlicher Druckhöhe allgemein zu lösen, müßte man mit Hülfe des (§. 70) die Beziehung zwischen der veränderlichen Druckhöhe x über der Gefäßmündung a, Fig. 82, und der entsprechenden Ausflußgeschwindigkeit v für jede beliebige Zeit aufstellen.

Fig. 82.

Wir wählen hierzu den Fall, daß das Gefäß eine verticale Axe aber veränderlichen Querschnitt hat, so daß, unter Beibehaltung der Bezeichnungen des [§. 70], A den veränderlichen Flächeninhalt des sinkenden Oberwasserspiegels bezeichnet und aus der Gleichung (3) des gedachten Paragraphen folgt:

$$(1)\quad 0 = 2g\left[\frac{P-p}{\gamma} + x\right] - 2aN\frac{dv}{dt} - v^2\left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right).$$

Zu dieser Gleichung kommt noch die sich von selbst verstehende Bedingung:

$$(2)\quad avdt = -Adx,$$

wo $-dx$ gesetzt ist, weil mit dem Wachsen von t ein Abnehmen von x stattfindet.

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen t und setzt überdies $v = \sqrt{2g\eta}$, wo η eine veränderliche Druckhöhe bezeichnet, so ergiebt sich:

$$(3)\quad 0 = \left[\frac{P-p}{\gamma} + x\right]dx + \frac{a^2}{A}Nd\eta - \eta\left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right)dx.$$

Die Integration dieser Gleichung ist ohne besondere Einschränkung für die meisten Fälle mit so besonderen Schwierigkeiten verknüpft, daß für unsere Zwecke auf Navier's „Résumé des leçons etc., Deuxième Partie Nr. 42“, verwiesen werden muß. Für die meisten unserer practischen Anwendungen kann man in der Regel a^2 so klein gegenüber A voraussetzen, daß alle mit a^2 multiplicirten Glieder wegzulassen sind und aus (3) erhalten wird

$$\frac{P-p}{\gamma} + x = \eta,$$

oder wenn man zu gleicher Zeit $P = p$ voraussetzt:

$$x = \eta = \frac{v^2}{2g}, \text{ d. i.}$$

$$(4)\quad v = \sqrt{2gx}.$$

Aus der Verbindung von (2) mit (4) folgt aber sodann, wenn zugleich μa statt a gesetzt wird:

$$\mu adt\sqrt{2gx} = -Adx, \text{ folglich:}$$

$$(5)\quad dt = \frac{-Adx}{\mu a\sqrt{2gx}}.$$

Ist A constant und die anfängliche Druckhöhe $= h$, so erhält man für die Zeit der Senkung um $h - x$, so daß die Druckhöhe am Ende der Zeit t zu x geworden ist, ohne Weiteres:

$$(6)\quad t = -\frac{A}{\mu a\sqrt{2g}}\int_h^x \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2A}{\mu a\sqrt{2g}}(\sqrt{h}-\sqrt{x}),$$

d. h. denselben Ausdruck, welcher bereits §. 77 gefunden wurde.

Die Gleichung (5) werde nunmehr dahin erweitert, daß sie für den Fall brauchbar ist, wo pr. Secunde ein Wasserquantum q oder qdt pr. Zeit dt zufließt, welches kleiner oder größer ist, wie die durch die Mündung abfließende Wassermenge.

Da die Geschwindigkeit, womit sich das Wasser an der Oberfläche ersetzt $\frac{q}{A}$ ist, so erhält man statt (2):

$$\mu a dt \sqrt{2gx + \left(\frac{q}{A}\right)^2} = -Adx + qdt, \text{ sonach}$$

$$dt = \frac{-Adx}{-q + \mu a\sqrt{2gx + \left(\frac{q}{A}\right)^2}}.$$

In den meisten Fällen ist jedoch $\left(\frac{q}{A}\right)^2$ als klein genug zu vernachlässigen, so daß überhaupt folgt:

$$(7)\quad dt = \frac{-Adx}{-q + \mu a\sqrt{2gx}}.$$

Hierbei ist einleuchtend, daß der Oberwasserspiegel sinkt oder steigt, je nachdem $q \lessgtr \mu a\sqrt{2gx}$ ist. Eben so versteht sich von selbst, daß bei nicht prismatischen Gefäßen von der Integration der Gleichungen (5) oder (7) der veränderliche Querschnitt A als Function von x ausgedrückt werden muß. Aufgaben der folgenden Paragraphen werden über alle diese Bemerkungen vollständigen Aufschluß geben.

§. 79.

Aufgabe 1. Wasseruhren. Ein cylindrisches Gefäß von kreisförmigen Querschnitte, dessen Durchmesser $D = 1^m$, mit senkrechter Achse, ist bis auf $h = 4$ Meter Höhe mit Wasser gefüllt. Im Boden desselben soll eine kreisförmige Mündung und an den Seiten des Gefäßes oder an einem (leichten) Schwimmstabe eine derartige Scala angebracht werden, daß in entsprechender Weise Stunden und Minuten abgelesen werden

können, überhaupt eine sogenannte Wasseruhr (klepsydera) entsteht, welche zwölf Stunden geht. *)

Es fragt sich, welche Größe die Ausflußöffnung erhalten muß und nach welcher Regel die Scala anzufertigen ist.

Auflösung. Zuerst liefert die Gleichung I. §. 77, den erforderlichen Werth von $a = \frac{d^2\pi}{4}$, wenn d den Durchmesser der kreisförmigen Mündung bezeichnet:

$$d = D\sqrt{\frac{2\sqrt{h}}{\mu\tau\sqrt{2g}}}.$$

Der Aufgabe gemäß ist hier $D = 1$, $h = 4$ und $\tau = 12.3600$ (Secunden), daher (wegen $\sqrt{2g} = 4{,}43$), wenn $\mu = 0{,}62$ angenommen wird:

$$d = \sqrt{\frac{2.2}{0{,}62.12.3600.4{,}43}},$$

$$d = 5{,}806 \text{ Millimeter.}$$

Ist wie vorausgesetzt τ die Zeit, in welcher das Gefäß ganz leer läuft und h die anfängliche Druckhöhe, so erhält man die einer andern Zeit τ_1 entsprechende Druckhöhe $= h_1$, nach I. §. 77, durch die Proportion:

$$\tau : \tau_1 = \sqrt{h} : \sqrt{h_1}, \text{ also}$$

$$\tau_1 = \tau\sqrt{\frac{h_1}{h}}.$$

Nach letzterer Formel erhält man für die Scala einer Zwölf-Stunden-Uhr:

Zeiten in Stunden	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Höhen vom Gefässboden aus gerechnet	4^m	$3^m,361$	$2^m,777$	$2^m,250$	$1^m,777$	$1^m,361$	$1^m,00$	$0^m,694$	$0^m,444$	$0^m,250$	$0^m,111$	$0^m,028$	0

Jedenfalls darf diese Uhr nur so weit ablaufen, daß die bereits §. 77 erwähnte Trichterbildung über der Mündung nicht eintreten kann.

---

*) Abbildungen derartiger Uhren findet man in Rees Encyclopaedia Artikel: Horology, Plates Vol. II.

... verlangt worden,
... Breite = b, aber
... Eigenschaft be-
... Bodenöffnung a
... um gleich viel
... ußgeschwindigkeit
... an erhalten hätte

... Seite b müßten
... $\left(\frac{\mu a k \sqrt{2g}}{b}\right)^2$ ist.

... windigkeit der
... mpen. Es ist
... ben, mit welcher
... pumpe, Fig. 83,
... darf, damit das
... dem aufsteigen-

... st zuvörderst die
... halb welcher das
... gventile CD bis
... durchläuft, was,
... mit Hülfe von
... en kann, sobald
... rständen absieht,
... Wasser zu über-

... den Durchmesser
... es Kolbens, und
... ngen von §. 57,
... hält man für die

für die Druckhöhe am Ende des Hubes:

$$x = b - \lambda - l,$$

ferner

$$\frac{A}{a} = \frac{D^2}{\delta^2}$$

und somit

$$t = \frac{2D^2}{\mu\delta^2\sqrt{2g}}\left\{\sqrt{b-\lambda} - \sqrt{b-\lambda-l}\right\}.$$

Sodann ergiebt sich die Geschwindigkeit u, womit das Wasser dem Kolben folgt, zu $u = \frac{l}{t}$. Besitzt nun der Kolben selbst eine Geschwindigkeit $= v$, so muß offenbar $u > v$ sein, wenn das aufsteigende Wasser den Raum hinter den Kolben stets gehörig ausfüllen, also die Pumpe überhaupt gut wirken soll.

Um die vorerwähnten, passiven Widerstände einigermaßen zu corrigiren, kann man mit D'Aubuisson *) den kleinsten, möglichen Werth von μ, nämlich 0,5, in Rechnung bringen.

Beispiel. Bei einer Pumpe, wo $l = 1^m,453$ beträgt und pr Minute $4\frac{1}{2}$ Hübe erfolgen, ist $v = \frac{2.1,453.4,5}{60} = 0^m,218$.

Ist ferner $D = 0^m,3248$, $d = 0^m,135$, $\lambda = 8^m,0$ und wird $b = 10^m,0$ gesetzt, so liefert vorstehende Formel:

$$t = 3,508 \text{ Secunden},$$

sonach $u = \frac{1,453}{3,508} = 0^m,414$, was beinah noch einmal so groß als v, folglich ganz entsprechend ist.

[§. 81.]

Aufgabe 3. Ausfluß aus pontonförmigen Gefäßen. In dem Boden des pontonförmigen Gefäßes, Fig. 32, befinde sich eine Mündung vom Inhalte $= a$, die Länge des Wasserspiegels sei $= L$, seine Breite $= B$ und die anfängliche Druckhöhe $= h$. Für die Bodenfläche sei l die Länge und b die Breite.

Man soll die Zeit bestimmen, nach welcher so viel Wasser ausgeflossen ist, daß die dann vorhandene Druckhöhe $= x$ beträgt.

Auflösung. Die Beantwortung der hier gestellten Frage ergiebt sich unmittelbar mit Hülfe von Formel (5) [§. 78], sobald man A als Function von x ausgedrückt hat.

Nach §. 32 erhält man aber für die veränderliche Länge α der Wasserfläche im Abstande x vom Boden

$$\alpha = l + \frac{x(L-l)}{h},$$

*) Traité d'hydraulique, Nr. 447.

so wie für die betreffende Breite $= \beta$:

$$\beta = b + \frac{x(B-b)}{h}, \text{ folglich}$$

$$A = \alpha . \beta = \frac{[lh+x(L-l)][bh+x(B-b)]}{h^2},$$

daher

$$-\mu a dt . h^2 \sqrt{2g} = dx \left\{ \frac{blh^2 + x[(B-b)lh + (L-l)bh] + x^2 (L-l)(B-b)}{\sqrt{x}} \right\},$$

so wie hieraus durch Integration:

$$t = \frac{1}{\mu a h^2 \sqrt{2g}} \left\{ 2blh^2 (h^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{2}{3} [(B-b) lh + (L-l) bh] (h^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}) + \right.$$
$$\left. \tfrac{2}{5} (L-l)(B-b)(h^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{5}{2}}) \right\}.$$

Für die Zeit der völligen Entleerung, wenn die Trichterbildung über der Mündung vermieden werden könnte, erhielte man, weil dann $x =$ Null zu setzen wäre:

$$t = \tfrac{2}{15} \frac{\sqrt{h}}{\mu a \sqrt{2g}} \left\{ 8bl + 2(Bl + bh) + 3BL \right\}.$$

Zusatz 1. Ist das Gefäß ganz unregelmäßig gestaltet, wie dies z. B. bei Teichen oftmals der Fall ist, so hat man sich zur Berechnung der Ausflußzeit einer Annäherungsmethode zu bedienen, wobei am Besten von der Simpson'schen Regel Gebrauch gemacht wird.

Bezeichnet man zu diesem Zwecke die Senkung des Wasserspiegels mit $h_0 - h_n$, theilt letzteren Abstand in n gleiche Theile, bezeichnet die Flächeninhalte der correspondirenden Wasserspiegel respective mit $A_0, A_1, A_2 \ldots A_n$, so wie die entsprechenden Druckhöhen mit $h_0, h_1, h_2 \ldots h_n$ und beachtet endlich die Form der Gleichung 5 (§. 78): $dt = \frac{Adx}{\mu a \sqrt{2gx}}$, behält übrigens die bisherigen Bezeichnungen bei, so findet sich:

$$t = \frac{h_0 - h_n}{3n\mu a \sqrt{2g}} \left\{ \frac{A_0}{\sqrt{h_0}} + \frac{A_n}{\sqrt{h_n}} + 4\left(\frac{A_1}{\sqrt{h_1}} + \frac{A_3}{\sqrt{h_3}} \cdots \frac{A_{n-1}}{\sqrt{h_{n-1}}} \right) + \right.$$
$$\left. 2\left(\frac{A_2}{\sqrt{h_2}} + \frac{A_4}{\sqrt{h_4}} \cdots \frac{A_{n-2}}{\sqrt{h_{n-2}}} \right) \right\}.$$

Die Wassermenge $= Q$, welche in dieser Zeit ausgeflossen ist, erhält man auf ähnliche Weise, wenn die Form der Gleichung 2 (§. 78) $dQ = Adx$ beachtet wird:

$$Q = \frac{h_0 - h_n}{3n} \left\{ A_0 + A_n + 4(A_1 + A_3 + \ldots A_{n-1}) + 2(A_2 + A_4 \ldots A_{n-2}) \right\}.$$

Zusatz 2. In dem Falle endlich, wo die Gestalt und Größe des Wasserbehälters, aus welchem der Ausfluß erfolgt (auch der etwaige Zufluß), unbekannt, dagegen die Mündungsgröße gegeben ist, sucht man ebenfalls mit Hülfe der Simpson'schen Regel der Formel $dQ = \mu a dt \sqrt{2gx}$ Genüge zu leisten, was folgendermaßen geschehen kann.

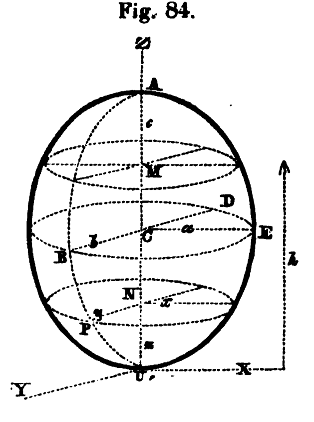
Man theilt die ganze Zeit, während welcher der Ausfluß beobachtet wird, in n gleiche Theile und trägt $\frac{\tau}{n}$ $(= dt)$ als Abscissen einer Curve, auf deren Ordinaten die während der Zeitintervalle $\frac{\tau}{n}$ beobachteten Druckhöhen h_0, h_1, h_2 . . . h_n sind. Der Inhalt der betreffenden Fläche entspricht sodann der Summe von $dt \sqrt{x}$, so daß die während τ Zeit ausgeflossene Wassermenge Q überhaupt dargestellt wird durch:

$$Q = \mu a \frac{\tau}{3n} \sqrt{2g} \Big\{ \sqrt{h_0} + \sqrt{h_n} + 4(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_3} \ldots \sqrt{h_{n-1}}) + 2(\sqrt{h_2} + \sqrt{h_4} \ldots \sqrt{h_{n-2}}) \Big\}.$$

[§. 82.]

Aufgabe 4. Ausfluß aus einem dreiaxigen Ellipsoid. Es sei *ABCDUEA*, Fig. 84, ein hohles dreiaxiges Ellipsoid, wobei die Größe der Halbaxen a, b, c ist. Am Ende U der vertical gestellten Axe $UA = 2c$ sei eine kleine Oeffnung vom Inhalte ω angebracht. Bei Herstellung der Letzteren sei das Ellipsoid auf eine Höhe $UM = h$ mit Wasser gefüllt, man soll die Zeit finden, nach welcher der Spiegel so weit gesunken ist, daß diese Druckhöhe nur noch $UN = z$ beträgt. Alle sonstigen Voraussetzungen und Bezeichnungen mögen die vorigen bleiben.

Fig. 84.



Auflösung. Denkt man sich durch die Hauptaxe $2c$ entsprechende Ebenen gelegt, so erhält man:

Für die Ellipse *AEU*: $x^2 = \frac{a^2}{c^2}(2cz - z^2)$.

Für die Ellipse *ABU*: $y^2 = \frac{b^2}{c^2}(2cz - z^2)$.

Hiernach ergiebt sich der Flächeninhalt A einer beliebigen Wasserschicht in der Höhe z von der Mündung aus gerechnet zu:

$$A = \pi x y = \frac{\pi ab}{c^2}(2cz - z^2).$$

Nach (5) [§. 78] ist sonach

$$dt = -\frac{\pi ab}{\mu\omega c^2 \sqrt{2g}} \left(\frac{2cz - z^2}{\sqrt{z}}\right) dz.$$

Hieraus folgt aber durch Integration:

$$\text{I.} \quad t = \frac{\pi ab}{\mu\omega c^2 \sqrt{2g}} \left\{ \tfrac{4}{3} c (h^{\frac{3}{2}} - z^{\frac{3}{2}}) - \tfrac{2}{5} (h^{\frac{5}{2}} - z^{\frac{5}{2}}) \right\}.$$

Zusatz. Für die Zeit, in welcher ein auf h Höhe gefülltes Kugelsegment leer läuft, folgt aus I, wenn der Radius der ganzen Kugel r, also $a = b = c = r$ gesetzt wird:

$$t = \tfrac{2}{15} \frac{\pi}{\mu\omega \sqrt{2g}} (10 r h^{\frac{3}{2}} - 3 h^{\frac{5}{2}}).$$

[§. 83.]

Aufgabe 5. Ausfluß bei gleichzeitigem Zufluß. Ein prismatisches Gefäß (Fig. 81) vom Querschnitte A erhält pr. Sec. q Cubikeinheiten Wasserzufluß, jedoch weniger (oder mehr) als durch eine Bodenöffnung a desselben abfließt. Die anfängliche Druckhöhe sei h und es fragt sich, nach welcher Zeit der Wasserspiegel so weit herabgesunken (oder gestiegen) ist, daß die vorhandene Druckhöhe x beträgt.

Auflösung. Die Auflösung besteht hier einfach in der Integration der Gleichung (7) [§. 78]. Man erhält zu diesem Ende

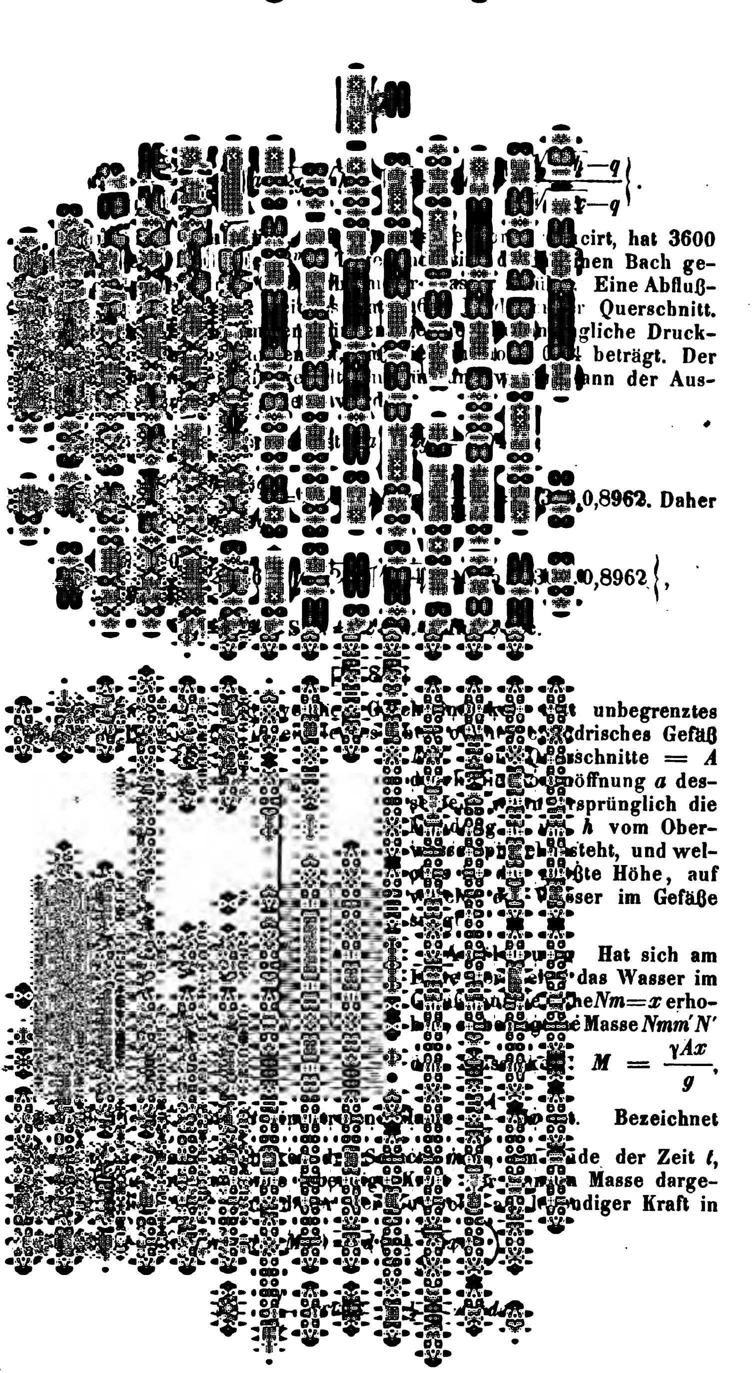
$$t = \frac{A}{\mu a \sqrt{2g}} \int \frac{-dx}{-\frac{q}{\mu a \sqrt{2g}} + \sqrt{x}},$$

oder wenn $\frac{A}{\mu a \sqrt{2g}} = B$ und $\frac{q}{\mu a \sqrt{2g}} = \sqrt{k}$ gesetzt wird:

$$t = B \int \frac{-dx}{-\sqrt{k} + \sqrt{x}}, \text{ d. i.}$$

$$t = 2B \left\{ \sqrt{k} \,.\, lgnt \frac{\sqrt{k} - \sqrt{h}}{\sqrt{k} - \sqrt{x}} + \sqrt{h} - \sqrt{x} \right\}, \text{ oder}$$

$$t = \frac{2A}{\mu a \sqrt{2g}} \left\{ \sqrt{h} - \sqrt{x} + \sqrt{k}\, lgnt \frac{\sqrt{k} - \sqrt{h}}{\sqrt{k} - \sqrt{x}} \right\}, \text{ oder endlich:}$$



cirt, hat 3600
hen Bach ge-
Eine Abfluß-
r Querschnitt.
gliche Druck-
beträgt. Der
ann der Aus-

0,8962. Daher

0,8962},

unbegrenztes
drisches Gefäß
schnitte $= A$
öffnung a des-
sprünglich die
h vom Ober-
steht, und wel-
ßte Höhe, auf
sser im Gefäße

Hat sich am
das Wasser im
he $Nm = x$ erho-
e Masse $Nmm'N'$

$$M = \frac{\gamma A x}{g},$$

Bezeichnet

de der Zeit t,
Masse darge-
ndiger Kraft in

Die während derselben Zeit dt verrichtete mechanische Arbeit ist aber auszudrücken durch:

$$(2) \quad \gamma A (h-x)\, dx,$$

da man sich vorstellen kann, der hydrostatischeDruck $\gamma A(h-x)$ treibe die Schicht mm', während gedachter Zeit durch dx Weg.

Ferner beachte man, daß der Wasserstrahl vom Querschnitte αa in der Mündung a sich nach dem Eintritte in das Gefäß plötzlich zum Querschnitte A erweitern muß, folglich ein Verlust an lebendiger Kraft eintritt, der gleich ist:

$$(3) \quad \tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{g} A dx \left(\frac{A}{\alpha a} - 1\right)^2 u^2.$$

Nach dem Principe von der Erhaltung der lebendigen Kräfte erhält man daher:

$$\frac{\gamma}{g} Axudu + \tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{g} Au^2dx + \tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{g} Adx\left(\frac{A}{\alpha a} - 1\right)^2 u^2 = \gamma A(h-x)dx,$$

so wie hieraus, wenn $1 + \left(\frac{A}{\alpha a} - 1\right)^2 = k$ gesetzt wird:

$$ku^2dx + 2xudu + 2gxdx = 2ghdx.$$

Diese Differenzialgleichung wird integrirbar, wenn sie mit x^{k-1} multiplicirt wird. Man erhält nämlich

$$kx^{k-1} u^2dx + 2x^k udu + 2gx^k dx = 2ghx^{k-1} dx, \text{ d. i.}$$

$$d(u^2x^k) + 2gx^k dx = 2ghx^{k-1} dx,$$

woraus durch Integration folgt:

$$u^2x^k + \frac{2g}{k+1} x^{k+1} = \frac{2g}{k} hx^k.$$

Sonach ist

$$\text{I.} \quad u^2 = \frac{2g}{k} h - \frac{2g}{k+1} x.$$

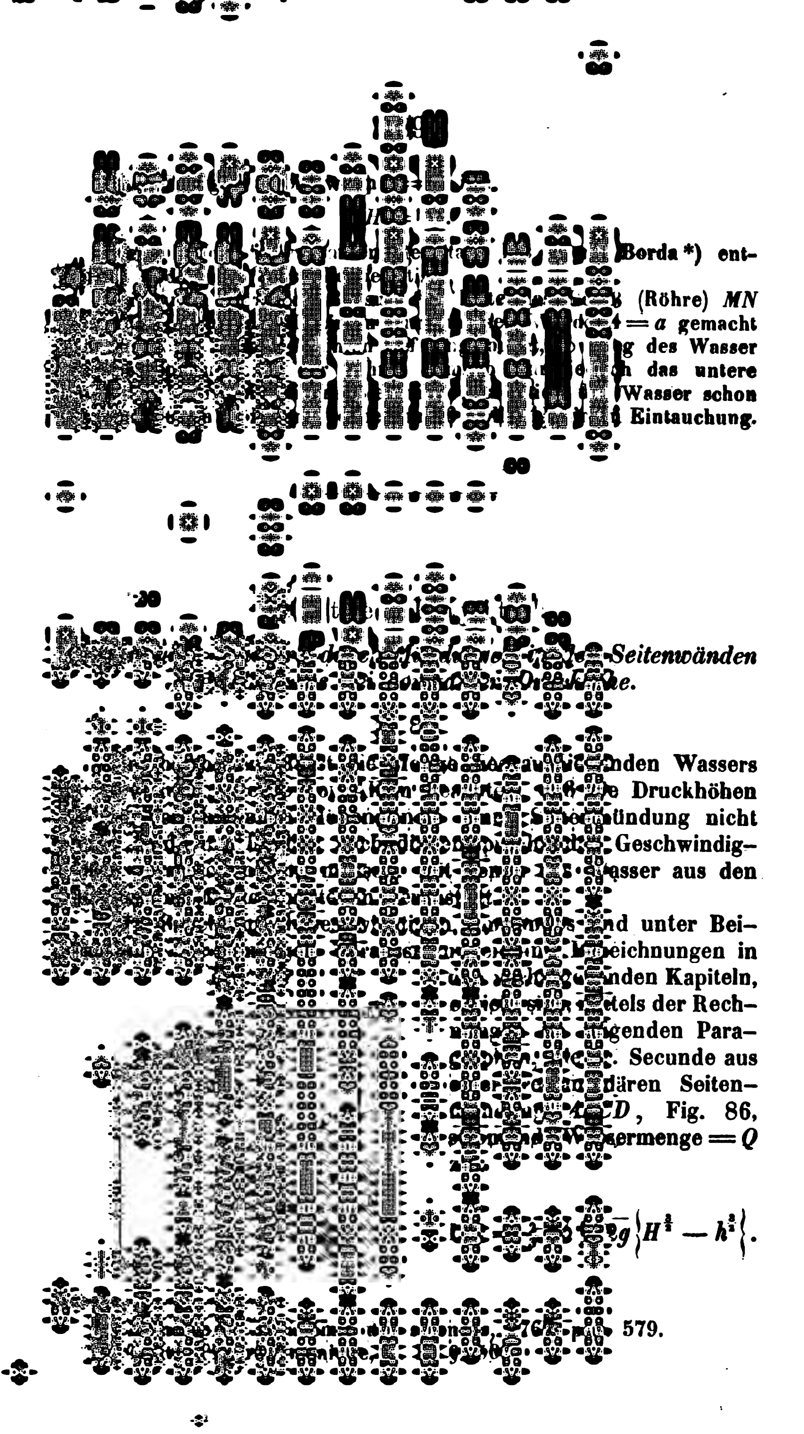
Um die größte Höhe H zu bestimmen, auf welche das Wasser im Gefäße steigt, hat man in I. $u =$ Null und $x = H$ zu setzen, wonach erhalten wird:

$$H = h + \frac{h}{k}, \text{ oder}$$

$$H = h + \frac{h}{1+\left(\frac{A}{\alpha a} - 1\right)^2}.$$

Ist ferner $A = a$, so folgt:

$$H = h\left(\frac{3\alpha^2 - 2\alpha + 1}{2\alpha^2 - 2\alpha + 1}\right).$$



Borda *) ent-

(Röhre) *MN*

$= a$ gemacht

g des Wasser

n das untere

Wasser schon

Eintauchung.

Seitenwänden

he.

nden Wassers

e Druckhöhen

ündung nicht

Geschwindig-

asser aus den

nd unter Bei-

eichnungen in

nden Kapiteln,

tels der Rech-

genden Para-

Secunde aus

dären Seiten-

D, Fig. 86,

ermenge $= Q$

$$\ldots \sqrt{2g} \left\{ H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}} \right\}.$$

579.

Dabei bezeichnet b die Länge jeder der horizontalen Mündungskanten $\overline{AD} = \overline{BC}$, H den Abstand der unteren Kante und h den Abstand der oberen Kante von dem horizontalen Wasserspiegel.

Dividirt man diesen Werth durch den kleinsten Querschnitt $\alpha b (H - h)$ des zusammengezogenen Wasserstrahles, so erhält man einen Quotienten, welcher die mittlere Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers genannt wird und die wir mit V bezeichnen wollen. Daher

$$V = \frac{Q}{\alpha b (H - h)}, \text{ oder}$$

$$(1) \quad V = \tfrac{2}{3} \psi \sqrt{2g} \frac{H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}}{H - h}.$$

Hieraus ergiebt sich ferner ($\psi = 1$ gesetzt) die V entsprechende, oder die mittlere Druckhöhe $= z$ zu:

$$(2) \quad z = \frac{1}{2g} \left\{ \frac{Q}{\alpha b (H - h)} \right\}^2, \text{ oder}$$

$$z = \tfrac{4}{9} \left\{ \frac{H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}}{H - h} \right\}^2, \text{ oder endlich,}$$

wenn die Höhe der Mündung mit e bezeichnet, also $H - h = e$ gesetzt wird,

$$z = \frac{4}{9e^2} \left\{ H^{\frac{3}{2}} - (H - e)^{\frac{3}{2}} \right\}^2.$$

Setzt man hier e so klein gegen H voraus, daß mit Beibehaltung dreier Glieder der Reihenentwickelung von $(H - e)^{\frac{3}{2}}$ ein für die Praxis hinreichender Annäherungsausdruck erhalten wird, so folgt:

$$z = \frac{4}{9e^2} \left\{ \tfrac{3}{2} e H^{\frac{1}{2}} - \frac{3e^2}{8H^{\frac{1}{2}}} \right\}^2 = \frac{4}{9e^2} \left\{ \tfrac{9}{4} e^2 H - \frac{9e^3}{8} + \tfrac{9}{64} \frac{e^4}{H} \right\}.$$

Wird hier endlich noch der (meistentheils sehr kleine) Werth $\frac{e^4}{H}$ vernachlässigt, so erhält man endlich:

$$z = H - \tfrac{1}{2} e = \frac{H + h}{2}, \text{ d. h.}$$

bei niedrigen Seitenmündungen ist als mittlere Druckhöhe der Abstand des Schwerpunctes der Mündungsfläche vom Oberwasserspiegel in Rechnung zu bringen.

Führt man letzteren Werth von z in (2) ein, so ergiebt sich unter bemerkter Voraussetzung:

$$\frac{H+h}{2}=\frac{1}{2g}\left\{\frac{Q}{\mu b(H+h)}\right\}^2, \text{ oder}$$

$$\text{II.}\quad Q=\mu b\,(H-h)\sqrt{2g\left(\frac{H+h}{2}\right)}.$$

Um für practische Anwendungen etwas mehr Aufschluß über die Grenzen zu erhalten, innerhalb welcher letzterer Ausdruck noch anwendbar ist, sei η die Druckhöhe für den Schwerpunct der Mündung und die Höhe der letzteren

$$H-h=\frac{\eta}{2}.$$

Sodann ist zunächst, weil gleichzeitig $\eta=\frac{H+h}{2}$ sein muß, $H=\frac{5}{4}\eta$, $h=\frac{3}{4}\eta$, folglich, nach (1):

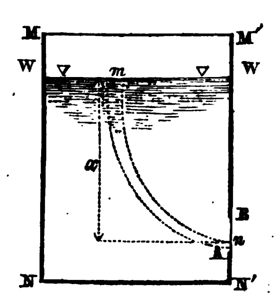
$$V=\tfrac{2}{3}\sqrt{2g}\,\frac{(\frac{5}{4}\eta)^{\frac{3}{2}}-(\frac{3}{4}\eta)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}\eta}=0{,}999..\sqrt{2g\eta}=0{,}999..\sqrt{2g\left(\frac{H+h}{2}\right)}.$$

Der Werth II. ist sonach für practische Zwecke so lange als vollkommen genau zu betrachten, als die Schwerpunctsdruckhöhe nicht kleiner wird, wie die doppelte Mündungshöhe, d. h. so lange $\eta \geqq 2(H-h)$ ist.

[§. 86.]

Der im vorigen §. behandelte Gegenstand gehört zur allgemeinen Aufgabe, die Wassermenge zu bestimmen, welche durch beliebig gestaltete Seitenöffnungen der Gefäße unter Voraussetzung constanter Druckhöhe strömt.

Fig. 87.



Für den Zweck der Ableitung eines entsprechenden mathematischen Ausdruckes für diese Wassermenge stelle Fig. 87 das Profil eines beliebigen Gefäßes mit ebener Seitenmündung dar, aus welcher Wasser fließt, das man sich dabei in gekrümmte Röhrchen mn zertheilt vorstellt. Nach §. 70 ist sodann die Geschwindigkeit in der Mündungsstelle n unabhängig von der Form dieser Röhrchen und entsprechend dem Verticalabstande nW des Punctes

n vom Oberwasserspiegel, so daß man für die bemerkte Geschwindigkeit erhält, wenn $nW = x$ gesetzt wird: $\sqrt{2gx}$.

Wird ferner die Breite des als unendlich kleinen Rechtecks zu denkenden Querschnitts bei n mit dy bezeichnet, so ergiebt sich ohne Weiteres das Differenzial des pr. Sec. ausfließenden Wasserquantums Q zu:

$$dQ = \mu dx dy \sqrt{2gx},$$

ein Ausdruck, dessen **bestimmtes** Integral die Auflösung der gestellten Aufgabe liefert.

1. Rectanguläre Mündung
mit respective horizontalen und verticalen Seiten.

Behält man die Bezeichnung des vorigen §. bei und beachtet überdies die Geschwindigkeit $= c$, womit das Wasser unmittelbar vor der Mündung ankommt*), so erhält man für die rectanguläre Mündung:

$$Q = \mu\sqrt{2g}\int_0^b dy \int_{h+\frac{c^2}{2g}}^{H+\frac{c^2}{2g}} dx\sqrt{x}, \text{ d. i.}$$

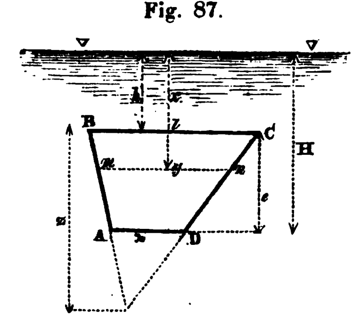
$$\text{I.}\quad Q = \tfrac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\left\{\left(H+\frac{c^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(h+\frac{c^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}.$$

Ist c klein genug, was z. B. der Fall ist, wenn der Mündungsquerschnitt gering ist, im Verhältniß zur Wandfläche, in welcher sich die Seitenöffnung befindet, so ergiebt sich I. des vorigen §.

2. Trapez- und Dreieckmündung.

Die Seitenlinie $\overline{BC} = l$ und $\overline{AD} = \lambda$ der Mündung, Fig. 88, mögen parallel zum Oberwasserspiegel liegen, die veränderliche Breite $mn \parallel BC$ werde mit y, die zugehörige Druckhöhe mit x bezeichnet, die Höhe des Dreiecks BCE, welches durch Verlängerung der Seiten BA und CD entsteht, sei $= z$, alle anderen Bezeichnungen sollen die bisherigen bleiben.

Fig. 87.



Zunächst ist sodann:

$$Q = \mu\sqrt{2g}\int_h^{h+e} dx\sqrt{x}\int_0^y dy.$$

*) Bezeichnet A den Querschnitt des Behälters parallel zur Mündung, so kann man $c = \frac{Q}{A}$ setzen.

Um ferner y als Function von x auszudrücken, bemerke man, daß $z = l\frac{x-h}{l-y}$ und auch $z = \frac{el}{l-\lambda}$, folglich

$$y = \frac{l(e+h)-\lambda h}{e} - \frac{l-\lambda}{e} . x \text{ ist,}$$

wofür gesetzt werden mag: $y = m - nx$.

Sodann ergiebt sich aber:

$$\text{II.} \quad Q = \mu\sqrt{2g}\left\{\tfrac{2}{3}m\left[(h+e)^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}\right] - \tfrac{2}{5}n\left[(h+e)^{\frac{5}{2}} - h^{\frac{5}{2}}\right]\right\},$$

$$\text{wo } m = \frac{(e+h)l+\lambda h}{e} \text{ und } n = \frac{l-\lambda}{e} \text{ ist.}$$

Für eine Mündung, welche ein mit der Spitze nach Unten gekehrtes Dreieck bildet, wird $\lambda = \text{Null}$, $m = \frac{Hl}{H-h}$, $n = \frac{l}{e}$ und daher

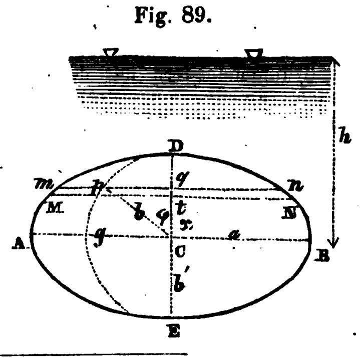
$$Q = \mu\sqrt{2g}\left\{\tfrac{2}{3}\frac{Hl}{H-h}\left[H^{\frac{3}{2}}-h^{\frac{3}{2}}\right] - \tfrac{2}{5}\frac{l}{H-h}\left[H^{\frac{5}{2}}-h^{\frac{5}{2}}\right]\right\}, \text{ oder}$$

$$\text{III.} \quad Q = \frac{2\mu l\sqrt{2g}}{15}\left\{\frac{2H^{\frac{5}{2}} - 5H^{\frac{3}{2}} + 3h^{\frac{5}{2}}}{H-h}\right\}.$$

Sind die Mündungshöhen $e = H - h$ sehr klein in Bezug auf die Druckhöhe h, so läßt sich auch hier, wie §. 85, der Schwerpunctsabstand der Fläche vom Oberwasserspiegel als mittlere Druckhöhe einführen.

3. Ellipsen- und Kreismündung.

Fig. 89.



Wir bezeichnen die Halbaxen der Ellipse $ABDE$ mit a und b, die Druckhöhe über dem Mittelpuncte C mit h. Ferner sei mN ein zu AB parallel liegendes Flächenelement der Ellipse von der unendlich kleinen Breite qt. Für den Flächeninhalt dieses Elementes erhält man, wenn $\angle pCq = \varphi$ gesetzt wird, wegen $\overline{mn} = 2a\sin\varphi$, u. $\overline{tq} = b\sin\varphi d\varphi$*)

Fläche $mN = 2ab\sin^2\varphi d\varphi$.

---

*) Es ist bekanntlich: $\overline{mq}^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2)$; $\overline{pq}^2 = b^2 - x^2$, ferner $\overline{pq} = b\sin.\varphi$, folglich: $\overline{mq} = a\sin\varphi$, $2\overline{mq} = \overline{mn} = 2a\sin\varphi$. Endlich wegen $\overline{Cq} = b(1-\cos.\varphi)$ auch $\overline{tq} = b\sin\varphi d\varphi$.

Da die Druckhöhe für dies Flächenelement $h - b\cos.\varphi$ ist, so folgt endlich:

$$dQ = 2\mu ab \sin^2\varphi d\varphi \sqrt{2g(h - b\cos.\varphi)}$$

oder wenn $\frac{b}{h} = m$ gesetzt und eine Reihenentwickelung vorgenommen wird:

$$dQ = 2\mu ab\sqrt{2gh}\left\{\sin^2\varphi d\varphi\left(1 - \frac{m}{2}\cos\varphi - \frac{m^2}{8}\cos^2\varphi - 16\cos^3\varphi - \frac{5}{128}m^4\cos^4\varphi \ldots\right)\right\}.$$

Bildet die ganze Ellipsenfläche die fragliche Mündung, so ist das Integral des letzteren Ausdruckes zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ zu nehmen und man erhält *):

$$\text{IV.} \quad Q = \mu ab\pi\sqrt{2gh}\left\{1 - \frac{1}{32}\frac{b^2}{h^2} - \frac{5}{1024}\frac{b^4}{h^4}\ldots\right\}.$$

Für eine kreisförmige Mündung, deren Radius $= r$ ist, ergiebt sich:

$$\text{V.} \quad Q = \mu r^2\pi\sqrt{2gh}\left\{1 - \frac{1}{32}\frac{r^2}{h^2} - \frac{5}{1024}\frac{r^4}{h^4}\ldots\right\}.$$

Für $h = r$ folgt noch

$$\text{VI.} \quad Q = 0{,}964\,\mu r^2\pi\sqrt{2gh}.$$

Anmerkung. Mit Hülfe der letzteren Formel würde sich unter besonderen Umständen das Quantum Wasser bestimmen lassen, welches dem von Mariotte eingeführten „Wasserzoll“ (pouce d'eau) entspricht.

Mariotte fand nämlich, daß pr. Minute aus einer verticalen, kreisförmigen Mündung von einem pariser Zoll Durchmesser (in dünner Wand?) bei einer constanten Druckhöhe von 7 Linien über der Kreismitte, ein Wasserquantum von 14 pariser Pinten (1 Cubikfuß = 36 Pinten) ausfloß, welches Quantum von Mariotte und noch heute in Frankreich und Italien von den Brunnenmeistern mit dem Namen „Wasserzoll“ bezeichnet, wohl auch zuweilen zum Messen kleiner fließender Wassermengen benutzt wird. Rechnet man den pariser Cubikfuß = 0,03428 Cubikmeter, so fließen aus gedachter Mündung pr. Minute: $\frac{14}{36}$. 0,03428 = 0,01333 Cubikmeter, d. i. pr. Stunde = 0,7998 Cubikmeter, oder pr. 24 Stunden = 19,195 Cubikmeter.

Wie wenig bestimmt und sicher indeß diese sogenannte Maßeinheit ist, erhellt allein daraus, daß bei so geringer Druckhöhe

---

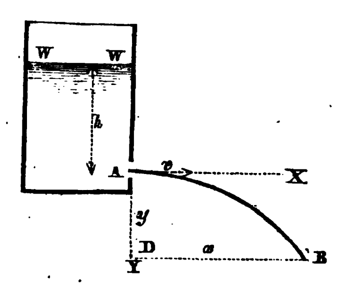
*) Man beachte, daß $\int_0^\pi dx\sin^2 x = \frac{\pi}{2}$; $\int_0^\pi dx\sin^2 x\cos^n x = \frac{1}{2+n}\int_0^\pi dx\cos^n x$, endlich: $\int_0^\pi dx\cos^n x = \left(\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\ldots\right)\frac{\pi}{2}$, wenn n eine gerade, $\int_0^\pi dx\cos^n x =$ Null, wenn n eine ungerade Zahl ist.

(1 Linie) über der oberen Kante der Mündung eine Senkung des Wasserspiegels fast unvermeidlich, auch die Dicke der Wand, worin die Kreismündung angebracht wird, nicht ohne Einfluß ist. Von letzterem Umstande hängt aber auch die Wahl des Ausflußcoefficienten in obiger Formel IV. ab, den man übrigens gewöhnlich 0,65 bis 0,70 annimmt.

§. 87.

Was die Frage nach der Form des mittleren Wasserfadens *AB*, Fig. 90, eines Strahles anlangt, welcher aus einer Seitenöffnung unmittelbar in die freie Luft tritt, wenn man den Widerstand der letzteren als gering genug vernachlässigt, so läßt sich nunmehr die betreffende Antwort unmittelbar nach §. 15 Geodynamik geben, daß diese Gestalt eine Curve und zwar eine gemeine Parabel ist, deren Coordinatengleichung dargestellt wird durch:

Fig. 90.



$$(1)\ y = x tg\alpha + \frac{g}{2v^2 \cos\alpha^2} x^2,$$

oder, wenn α = Null ist, durch

$$(2)\quad y = \frac{g}{2v^2} . x^2,$$

in welcher Gleichung, nach II. §. 67, $v = \sqrt{2gh}$ gesetzt werden kann. Sodann wird aber aus (2)

$$\text{I.}\ y = \frac{x^2}{4h},\ \text{so wie}$$

$$\text{II.}\ x = 2\sqrt{h.y}\ \text{und endlich folgt:}$$

$$\text{III.}\ v = x\sqrt{\frac{g}{2y}}.$$

Die für die Praxis hinreichende Uebereinstimmung dieser Gleichungen mit der Erfahrung haben neuerdings wieder Boileau *) und Weisbach **) nachgewiesen. Andere betreffende Versuche (mit Hinzufügung der Geschwindigkeitscoefficienten) sind in folgender Tabelle zusammengestellt, wobei y und x die beobachteten (respective verticalen und horizontalen) Coordinaten, x_1 die berechnete Abscisse und v_1 die nach Formel III. berechnete Geschwindigkeit bezeichnet.

*) Journal de l'école polytechnique. T. XIX. p. 206.
**) Ingenieur-Mechanik, 2. Auflage, Bd. 1, Seite 502.

Die Mündungen sind sämmtlich kreisförmig. Die ersten beiden Versuche beziehen sich auf franz. Zolle und Fuße ($g = 30{,}1958$ Fuß), die übrigen auf Metermaße.

Beobachter	Durchmesser der Kreismündung	Druckhöhe $= h$	Beobachtetes y	Beobachtetes x	$x_1 = 2\sqrt{hy}$	$v_1 = x\sqrt{\frac{g}{2y}}$	$v = \sqrt{2gh}$	$\psi = \frac{v_1}{v}$	Mündung
[illegible]	[illegible] Zoll	[illegible] Fuß	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	23,313	[illegible]	[illegible]
[illegible]	1½ Zoll	2,708	[illegible],500	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	desgl.
Michelotti	0m,02710	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Castel	0m,01550	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	Cylind. [illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Hieraus erkennt man zugleich, wie man aus der beobachteten Sprungweite etc. eines Wasserstrahles den Coefficienten der Ausflußgeschwindigkeit berechnen kann, ein Verfahren, was in jüngster Zeit von Weisbach *) und Castel **) in Anwendung gebracht worden ist und allein hinreichen dürfte, etwaige Zweifler an der Existenz eines Geschwindigkeitscoefficienten zu belehren. Der Luftwiderstand äußert seinen Einfluß nur bei sehr bedeutenden Druckhöhen.

§. 88.

Versuche über den Ausfluß des Wassers durch Seitenöffnungen.

I. *Es ist Druckwasser über der oberen Mündungskante vorhanden (Durchlassöffnungen).*

Unter den älteren Versuchen über Wasserausfluß durch Seitenöffnungen verdienen, für die Praxis, besonders die der beiden Michelotti (Vater und Sohn) ***), so wie die von Bossut ****) genannt zu werden.

Erstere beiden stellten ihre Versuche in der Nähe von Turin mit Wasser an, welches von dem Flusse Dora ab nach einem allein für hydraulische Experimente erbauten Thurme geleitet wurde, in dessen Seitenwänden, und zwar 20 Fuß, 15 Fuß, 10 Fuß und 5 Fuß tief unter dem Boden des Zuführungscanales, quadratische Oeffnungen bis zu 3 Zoll Seite und kreisförmige bis zu 6 Zoll Durchmesser in dünner Wand (oder mit verschiedenen Ansätzen versehen) angebracht waren. Das ausfließende Wasser wurde in großen gemauerten und gehörig cubicirten Behältern aufgefangen und durch den beobachteten Wasserstand gemessen.

Bossut nahm seine Versuche an den Wasserleitungen von Mézières vor und zwar bediente sich derselbe eines parallelepipedisch geformten Kastens von 12 Fuß Höhe und 3 Fuß Seite, aus welchem das Wasser durch eine dünne Wand ($\frac{1}{2}$ Linie dickes Kupferblech) ausfloß. Die ausgeflossene Wassermenge wurde in einem Fasse aufgefangen und hier mittels eines geaichten würfelförmigen Kupfergefäßes von $\frac{1}{8}$ Cubikfuß Inhalt genau gemessen.

Aus diesen Versuchen ging hervor, daß die größeren Druckhöhen ein etwas geringeres Ausflußquantum geben, als kleinere Druckhöhen, indeß war die Abweichung so gering, daß man an der Allgemeinheit des Satzes einigermaßen zweifeln mußte, die wirklich ausgeflossene Wassermenge aber überhaupt 0,619 der theoretischen setzen konnte.

---

*) Ing. Mech. a. a. O.

**) a. a. O. p. 184.

***) Hydraulische Versuche von F. D. Michelotti und J. T. Michelotti. Deutsch von Zimmermann. Berlin 1808.

****) Bossut a. a. O. Tome second. §. 489 etc.

Zur Vergleichung und Vervollständigung der interessanten Zusammenstellung aus den Bossut'schen Versuchen auf Seite 164, §. 72 für die Verhältnisse von Wasserstrahlen, welche bei constanter Druckhöhe aus einer horizontalen kreisförmigen Bodenöffnung strömten, werde hier etwas Gleiches für verticale Kreismündungen nach Michelotti dem Jüngeren mitgetheilt. *)

Druckhöhe in Pariser Zollen	Mündungsdurchmesser $= d$ in Linien	Kleinste Strahldicke $= \delta$ **) in Linien	Abstand $= e$ der kleinsten Zusammenziehung vor der Mündung in Linien	$\frac{\delta}{d}$	$\frac{e}{d}$	μ
77,50	72,0	56,850	28,45	0,789	0,395	0,619
135,25	72,0	56,756	28,35	0,788	0,394	0,618
82,73	36,0	28,285	14,15	0,785	0,393	0,612
140,87	36,0	28,185	13,85	0,783	0,385	0,611

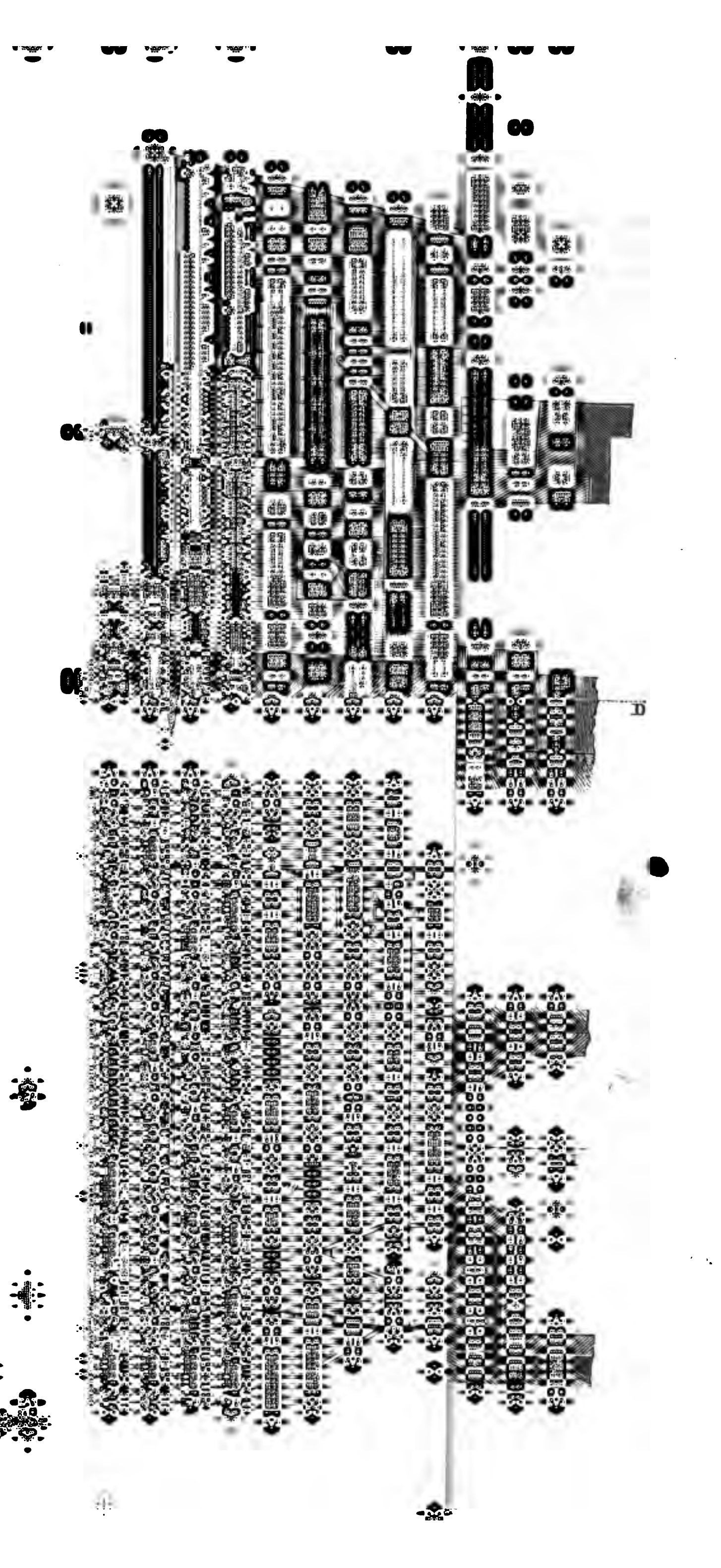
Hieraus ließe sich, ähnlich Seite 165, Fig. 71, das Verhältniß $d : \delta : e = 100 : 79 : 39$ aufstellen.

§. 89.

Die großartigsten, genauesten und für die practische Anwendung wichtigsten Versuche über den Ausfluß durch rectanguläre Seitenöffnungen sind die, welche, auf Veranlassung des französischen Kriegsministeriums, 1828 und 1829 gemeinschaftlich von Poncelet und Lesbros ***) und 1829 bis 1834 allein von Lesbros ****) vorgenommen wurden.

Beide Experimentatoren bedienten sich hierzu als Wassergefäße der Festungsgräben der Stadt Metz, welche von der Obermosel gespeißt und in die Untermosel abgelassen werden können. Das erste Sammelgefäß für die Versuche hatte 25000 Quadratmeter Oberfläche und würde allein schon entsprechend gewesen sein, hätte man seine Wasserstände gehörig reguliren können. Man setzte daher dies Gefäß mit einem zweiten in Verbindung, dessen Oberfläche 1500 Quadratmeter betrug und wobei der Abfluß von $1\frac{1}{2}$ Cubikmeter Wasser eine Senkung des Oberwasserspiegels von nur einem Millimeter veranlaßte.

*) a. a. O. S. 244 der deutschen Ausgabe.
**) Mit dem Zirkel gemessen.
***) Poncelet et Lesbros, Expériences hydrauliques etc. Paris 1832.
****) Lesbros, Expériences hydrauliques etc. Paris 1851.



Um ferner die Umstände des beabsichtigten Ausflusses so viel wie möglich den in der Praxis vorkommenden Fällen anzupassen, wurde an der Mündungsstelle ein hölzernes Durchlaßwehr eingebaut, gleichsam ein dritter Behälter (Reservoir *) erzeugt und in dessen Wand die Ausflußöffnung angebracht.

Letztere Räumlichkeiten, mit den später von Lesbros angebrachten Veränderungen, sind Fig. 91 bis 91^b abgebildet, und zwar zeigt die erstere Figur den Verticaldurchschnitt nach der Richtung von *EFFGGH* der Grundrißfigur 91^a genommen, während letztere Figur der Schnittrichtung *ABBCCD* von Fig. 91 und die Querprofilansicht, Fig. 91^b, der Schnittrichtung *JK* des Grundrisses entspricht.

Lesbros insbesondere schloß das früher ganz freie Ausfluß-Reservoir (Fig. 91^a) so ein, wie es die Grundrißfigur erkennen läßt, versah es auch (gegen Sonne und Wetter) mit einem Dache, ließ den Beobachter des Wasserstandes seitwärts vom Stromstriche in einem Schwimmkasten *fg* Platz finden, stellte den zur Ermittelung des ruhigen Wasserspiegels (weit von der Mündung) erforderlichen Maßstab (Pegel) **) in *X'* (statt früher mit Poncelet bei *X*) auf etc.

Vor der Ausflußmündung brachte man (statt der vorher hölzernen) in hydraulischen Mörtel gemauerte Aichräume *k* von je 3 . 3 . 1 = 9 Cubikmeter = 9000 Liter an, führte diesen das ausgeflossene Wasser durch ein Gerinne *t* (in der Grundrißfigur weggelassen) zu und stellte unter der Bodenöffnung in diesem Gerinne ein durchbrochenes Gefäß *o* auf, um das ankommende Wasser zu zertheilen, seine lebendige Kraft größtentheils zu vernichten und nachtheilige Schwankungen zu vermindern.

Das Wasser beider Aichräume *k* konnte durch Schütze mit einander in Verbindung gesetzt, abgesperrt oder in die Untermosel (nach der Richtung *GH* der Grundrißfigur) abgelassen werden.

Die Seitenwand des zweiten Gefäßes *k* wurde bei *l* (Fig. 91^a) durchbrochen und daselbst ein parallelepipedischer Raum (Kasten) von $0^m,2$ Seite gebildet, der mittels eines kleinen Schützens von *k* abgesperrt werden konnte. An dem Boden des Kastens *l* befestigte man in geeigneter Weise einen Stab (Pegel) *m*, Fig. 91^b, mit Scala, Nonius etc. versehen, um damit die Wasserstände der Aichgefäße *k* bestimmen zu können. Hinter *l* wurde ein vertiefter Raum *n* angebracht, groß genug, um einer Person Platz zu verschaffen, die mittels eines Spiegels den Augenblick zu beobachten hatte, wo eine Spitze des gedachten Pegels die steigende Wasserfläche berührte.

Zur Abführung etwaigen Filterwassers diente ein Canal *q*, während ein längerer Canal *rr* zum Zwecke hatte, das Wasser im Hauptreservoir zu reguliren, oder dasselbe völlig in die Untermosel ablassen zu können.

---

*) Man sehe die nebenstehende Figur 91^a.

**) Auf die treffliche Anordnung und Herstellung dieser Maßstäbe, so wie auf das Messen selbst, wurde die äußerste Sorgfalt verwendet und überhaupt alle betreffenden Arbeiten mit Genauigkeit und Vorsicht ausgeführt, deren Beispiel für ähnliche Fälle nicht genug empfohlen werden kann. Wegen des Speciellen hierüber muß auf die vorher angeführten Quellen verwiesen werden.

Um nicht eine mathematisch genaue Form der Aichgefäße voraussetzen zu müssen, wurden diese Räume besonders und zwar dadurch gemessen, daß man Gefäße von genau bekanntem Inhalte (die wieder durch kleinere Gefäße von noch genauer bestimmtem cubischen Raume gefüllt worden waren) in dieselben ausleerte und die jeder Entleerung entsprechende Wasserhöhe mit aller denkbaren Sorgfalt maß.

Die Versuche von 1828 erstreckten sich auf rectanguläre Mündungen in dünner Wand von $0^m,2$ constanter Breite, Höhen von $0^m,01$ bis $0^m,20$ und Abständen (Druckhöhen) des Oberwasserspiegels von der oberen Kante von 3 Millimeter bis 1,7 Meter. Auch auf einige Versuche bei Ueberfällen (Mündungen ohne Druckhöhen über der oberen Kante) hatte man Bedacht genommen, von denen weiter unten die Rede sein wird.

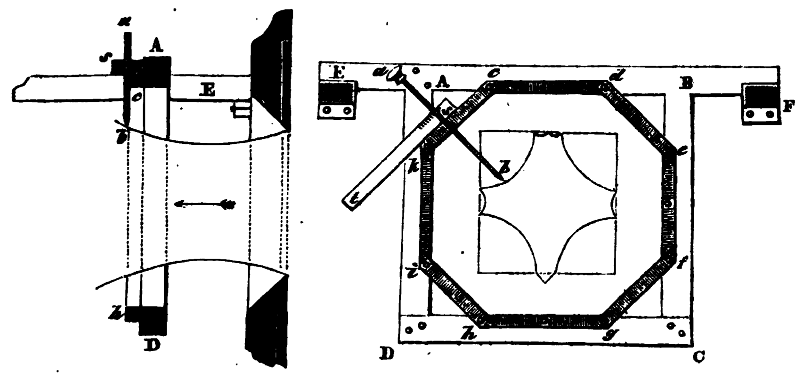
Die Versuche, welche 1829 — 1834 Lesbros allein anstellte (der Zahl nach über Zweitausend *) übertrafen an Umfang, Mannigfaltigkeit die ersteren bedeutend und erstreckten sich namentlich auf viele bisher unerörterte Fälle der Praxis.

§. 90.

Strahlenmessungen.

Von den Resultaten der vorher beschriebenen eben so interessanten als practisch wichtigen Versuche mögen zuerst einige Ergebnisse directer Strahlenmessungen mitgetheilt werden.

Fig. 92a. Fig. 92.



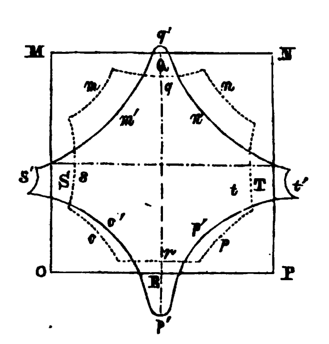
*) 1100 Versuche betrafen den Ausfluß durch dünne Wand in die freie Luft unter verschiedenen Dispositionen und Formen des Ausflußbehälters. 526 Versuche bei außerhalb angesetzten Gerinnen. 49 Versuche bei unter Wasser gesetzten Durchlaß-Mündungen. 353 Versuche bei Ueberfällen, in die freie Luft mündend, oder mit angesetzten Gerinnen, Ueberfällen an den Enden von besonderen Gerinnen und unvollständigen, d. h. solchen Ueberfällen, welche zum Theil vom Unterwasser bedeckt werden.

Fig. 92 zeigt die hierzu angewandte Vorrichtung in der Vorder- und Fig. 92ª in der Seitenansicht, wenn man sich erstere Figur in der Mitte vertical durchschnitten denkt.

Dabei ist *ABCD* ein in Trägern *EF* verschiebbar vor der Ausflußöffnung aufgehangener hölzerner Rahmen, auf welchem außerhalb ein reguläres aus Schienen mit Scaleneintheilung gebildetes Achteck *cdefghik* in der Art befestigt ist, daß es den ausfließenden Strahl überall umgiebt. Auf jeder dieser Polygonseiten läßt sich ein mit Nonius versehenes Lineal *ts* aufbringen und verschieben, welches zugleich die Mutter einer langen Schraube *ab* enthält, deren feine Spitze *b* man nach und nach mit allen Puncten des ausfließenden Strahles in Berührung zu bringen sucht.

Bei einer quadratischen Oeffnung *MNOPRSTQ*, Fig. 93, von $0^m,2$ Seite in dünner Wand, mündend in die freie Luft, bei vollständiger Contraction und einer Druckhöhe von $1^m,68$ über der Mitte, erhielten Poncelet und Lesbros auf dem beschriebenen Wege:

Fig. 93.



das Profil *mntpros* bei 15 Centimeter Abstand von der Mündung und von 237,46 Quadr.-Centim. Inhalt,

das Profil $m_1 n_1 t_1 p_1 o_1 s_1 q_1$ bei 30 Centimeter Abstand von der Mündung und von 225,06 Quadrat-Centim. Inhalt.

Letzteres Profil war zugleich das kleinste, was an diesem Strahle beobachtet wurde und wonach sich der Contractionscoefficient α ergab:

$$\alpha = \frac{225,06}{400,0} = 0,563.$$

Da ferner der Ausflußcoefficient μ für dieselbe Mündung zu 0,602 gefunden wurde, so müßte hier nach §. 72 ein Geschwindigkeitscoefficient ψ stattfinden:

$$\psi = \frac{\mu}{\alpha} = \frac{0,602}{0,563} = 1,069.$$

Letzteres Resultat würde aber im Widerspruch mit dem stehen, was §. 67, Zusatz 1, in Betreff ψ gesagt ist, wenn man

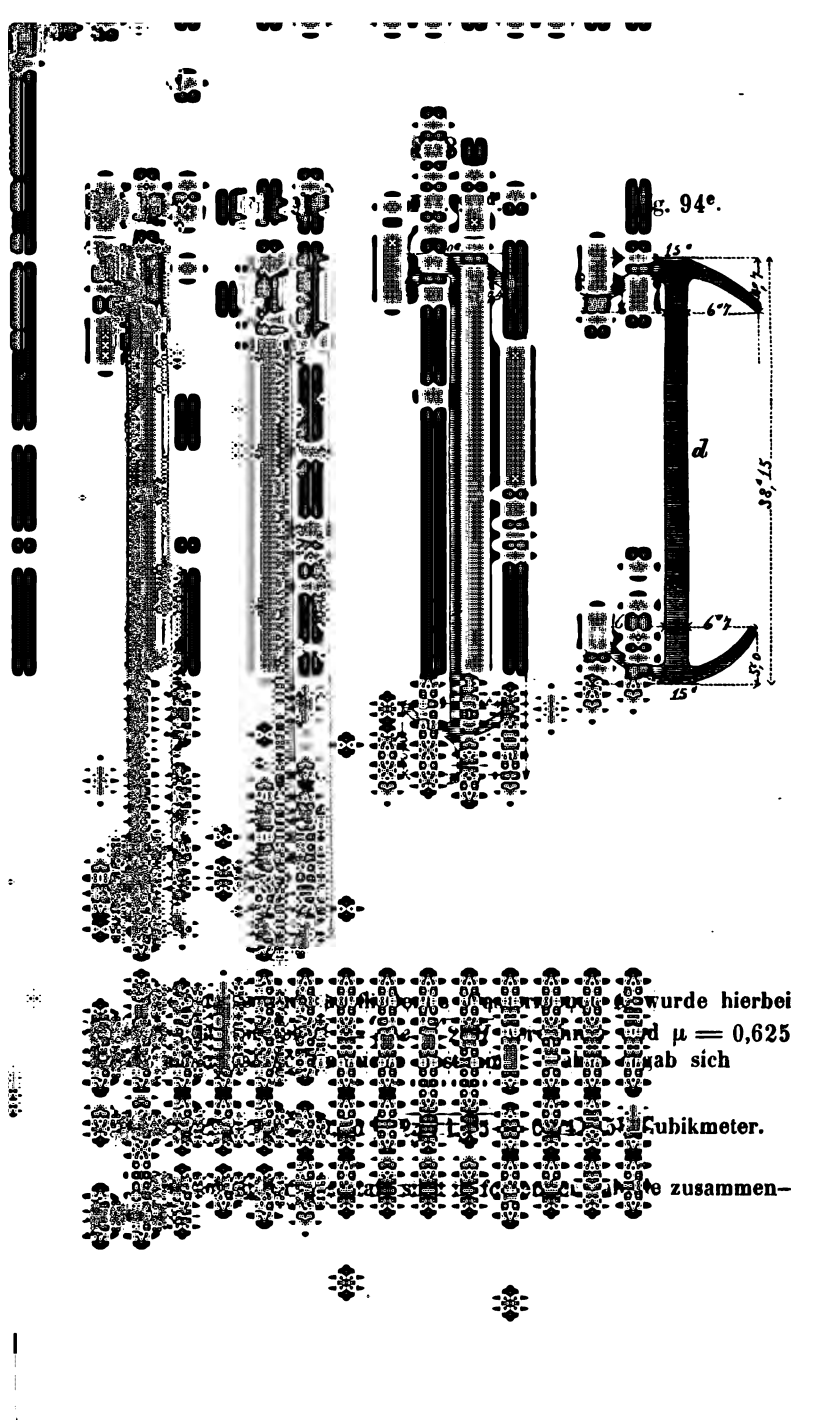
... bekannte Ursachen
... Versuche nicht
...

... stimmend sind
... ten Messung*)
... dung in dünner
... Druckhöhe von
...

... undriß und die
... entsprechende
...

... dadurch zu er-
... voraussetzt, dessen
... r Druckhöhe der
...

g. 94e.



… wurde hierbei … d $\mu = 0{,}625$ … ab sich

… Kubikmeter.

… zusammen-

[illegible]	Mittlere Geschwindigkeiten, wenn die Wassermenge Q durch die Werthe von Columne (3) dividirt wird (7)	Geschwindigkeitscoefficient ψ (8)
	Meter	
[illegible]	3,4465	0,625
[illegible]	5,2820	0,961
[illegible]	5,4049	0,972
[illegible]	4,9436	0,870
[illegible]	4,7863	0,814

[illegible] ach hatte der [illegible] 30 Centimeter [illegible] von der Mün- [illegible] kleinsten Quer- [illegible] d für diesen den [illegible] gkeitscoefficien – [illegible] ,972.

[illegible] tz. Für die [illegible] chtige Strahlen- [illegible] hat neuerdings [illegible] bach angestellt.*) [illegible] llgemeinen be- [illegible] derselbe eines [illegible] en Rahmens (Rin- [illegible] her den Strahl [illegible] außerhalb der [illegible] ufgehangen wur- [illegible] iesen Ring traten [illegible] deren äußerste [illegible] möglichste Be- [illegible] nit dem Strahle [illegible] urden.

*) [illegible] ik und Hydraulik." [illegible] 8, 9 und Seite 73.

Für kreisförmige Mündungen von 0,866 bis 3,584 Centimeter Durchmesser (in dünner Wand und bei vollkommener Contraction), bei Druckhöhen von $0^m,57 - 0^m,57$ über der Mitte der Ausflußöffnung, erhielt Weisbach als Geschwindigkeitscoefficienten den Mittelwerth: $\psi = 0,961$.

Nebenstehende Figur 95 zeigt überdies Grundriß und Querprofile eines von Weisbach beobachteten Wasserstrahles, welcher durch eine rectanguläre Mündung von 2,502 Centimeter Höhe und 5,052 Centimeter Breite floß, wenn dabei die mittlere Druckhöhe 0,559 Meter betrug.

Anmerkung. Ueber die mannigfachen Formen und sonstigen interessanten Erscheinungen, welche Wasserstrahlen erkennen lassen, wenn diese aus verschieden gestalteten Oeffnungen fließen, über die sich dabei bildenden Bäuche, Knoten und eigenthümlichen Wendungen des Strahles, haben besonders Versuche angestellt:

Michelotti, Hydraulische Versuche (deutsche Ausgabe) Seite 19.

Hachette, Mémoire, relatif à l'écoulement des fluides etc. Paris 1815 u. 1816. Auch in den „Annales de Chimie et Physique. T. I. p. 202 und T. III. p. 78.“

Bidone, Expériences sur la forme et la direction des veines et courans d'eau lancés par divers ouvertures. Turin 1829. Auch in den „Turiner Mémoiren. Tom. XXXIV. p. 229.“

Savart, De la Constitution des veines liquides etc. 1833.

Ueber die Resultate Hachette's und Bidone's (namentlich über die des Letzteren) giebt Weisbach vollständig Auskunft in der „Maschinenencyclopädie“ Artikel „Ausfluß“ S. 436 etc. Die Arbeit Savart's bespricht d'Aubuisson in seiner Hydraulik, §. 20. Auch Poggendorf Annalen, Bd. 33, S. 451 und S. 520.

Wir unterlassen jedes specielle Eingehen auf diese Gegenstände, da sie dem practischen Zwecke gegenwärtigen Buches zu fern stehen.

§. 91.

Ausflußcoefficienten, nach Poncelet und Lesbros für rectanguläre Seitenöffnungen in dünner Wand, bei vollkommener Contraction und mündend in die freie Luft.

Nachstehende Tabelle ist das Hauptresultat der Versuche von 1828, erweitert durch Interpolation von $1^m,70$ bis $3^m,0$ Druckhöhe.

wo selbst das Wasser vollkommen ruhig ist. | unmittelbar an der Mündung gemessen.

Wasserhöhe über dem ... Kante																		
0,02	0,572	0,596	0,615	0,634	0,659	0,694	0,592	0,611	0,624	0,644	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0,03	0,578	0,600	0,620	0,638	0,659	0,688	0,594	0,612	0,626	0,643	0,662	0,690	0,593	0,613	0,637	0,659	0,685	0,708
0,04	0,582	0,603	0,623	0,640	0,658	0,683	0,596	0,612	0,627	0,642	0,660	0,684	0,593	0,612	0,636	0,654	0,678	0,695
0,05	0,585	0,605	0,625	0,640	0,658	0,679	0,597	0,613	0,628	0,642	0,659	0,680	0,593	0,612	0,636	0,651	0,672	0,686
0,06	0,587	0,607	0,627	0,640	0,657	0,676	0,598	0,613	0,629	0,641	0,658	0,676	0,594	0,613	0,635	0,647	0,668	0,681
0,07	0,588	0,609	0,628	0,639	0,656	0,673	0,598	0,614	0,630	0,640	0,657	0,673	0,594	0,613	0,635	0,645	0,665	0,677
0,08	0,589	0,610	0,629	0,638	0,656	0,670	0,599	0,614	0,630	0,639	0,656	0,670	0,594	0,613	0,635	0,643	0,662	0,675

1,30	0,605	0,615	0,622	0,624	0,625	0,622	0,604	0,613	0,622	0,624	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1,40	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,618	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,618	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,618
1,50	0,602	0,611	0,620	0,620	0,619	0,615	0,603	0,611	0,620	0,620	0,619	0,615	0,602	0,611	0,620	0,620	0,619	0,615
1,60	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613
1,70	0,602	0,610	0,617	0,616	0,615	0,612	0,602	0,610	0,617	0,616	0,615	0,612	0,602	0,610	0,617	0,616	0,615	0,612
1,80	0,601	0,609	0,615	0,615	0,614	0,612	0,602	0,609	0,615	0,615	0,614	0,612	0,601	0,609	0,615	0,615	0,614	0,612
1,90	0,601	0,608	0,614	0,613	0,612	0,611	0,601	0,608	0,614	0,613	0,613	0,611	0,601	0,608	0,614	0,613	0,613	0,611
2,00	0,601	0,607	0,613	0,612	0,612	0,611	0,601	0,607	0,613	0,612	0,612	0,611	0,601	0,607	0,614	0,612	0,612	0,611
3,00	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609

Im Allgemeinen lassen diese Tabellen [1]) erkennen, daß sich die Ausflußcoefficienten mit den Druckhöhen und den Höhen der Mündungen ändern und daß sie (mit unbedeutenden Ausnahmen) größer werden, wenn Druckhöhen und Mündungshöhen abnehmen. Ferner ist wahrzunehmen, daß sich die Ausflußcoefficienten bei größeren Druckhöhen und verschiedenen Mündungshöhen der Mittelzahl 0,61 nähern.

Zusatz 1. Lesbros (allein angestellte) Versuche von 1829 — 1834 haben vorstehende Ergebnisse nicht nur bestätigt, wie insbesondere aus dem Vergleiche der Tabelle in §. 91 mit der Obigen hervorgeht, sondern auch noch zu dem interessanten und wichtigen Endresultate geführt [2]):

»daß diese Ausflußcoefficienten, unter sonst gleichen Umständen dieselben bleiben, welche Seite einer rectangulären Mündung auch zur Höhe oder Basis genommen wird, sobald nur die größte Dimension die kleinste nicht um das Zwanzigfache übertrifft.«

Zusatz 2. Die Tabellenwerthe sind übrigens auch für kreisförmige [3]) und für Mündungen gültig, deren Querschnittsform beliebige geradlinige Figuren bilden [4]), sobald dabei nur keine einspringenden Winkel vorkommen [5]) und die Druckhöhen nicht zu gering sind.

---

1) Bemerkt muß werden, daß diese Tabellen in der angegebenen Folge der Druckhöhengrößen nicht den directen Versuchen entnommen, sondern aus diesen berechnet sind; eben so erstreckten sich die Versuche nur auf Druckhöhen bis zu $1^m,7$ (über der oberen Mündungskante), so daß die Erweiterung bis zu $3^m,0$ durch Interpolation geschehen mußte.

2) Expériences §. 251.

3) Weisbach's Versuche (Hydraulische Untersuchungen, 2. Abtheil. S. 65) bestätigen ebenfalls diese allgemeinen Angaben; speciell fand derselbe für Mündungen in dünner Wand bei vollkommner Contraction nachstehende Werthe:

Druckhöhe	Durchmesser	μ	Druckhöhe	Durchmesser	μ
$0^m,60$	$0^m,01$	0,628	$0^m,25$	$0^m,01$	0,637
—	$0^m,02$	0,621	—	$0^m.02$	0,629
—	$0^m,03$	0,614	—	$0^m.03$	0,622
—	$0^m,04$	0,607	—	$0^m,04$	0,614

4) D'Aubuisson, Traité d'hydraulique, §. 27.

5) Hachette, Annales de Chimie, T. I., p. 202.

Beispiel. Welche Wassermenge fließt pr. Secunde durch eine rectanguläre Oeffnung in dünner Wand bei vollkommner Contraction, welche $0^m,30$ Breite und $0^m,15$ Höhe hat und die Druckhöhe über der oberen Kante $0^m,05$ beträgt.

Auflösung. Der Ausflußcoefficient μ der Formel

$$Q = \tfrac{2}{3}\,\mu b \sqrt{2g}\left\{H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}\right\}$$

ist hier nach der Tabelle, weil er zwischen 0,597 und 0,613 fällt, zu 0,605 zu nehmen, so daß erhalten wird

$$Q = \tfrac{2}{3} \times 0{,}605 \times 0{,}30 \times 4{,}43\,(0{,}20^{\frac{3}{2}} - 0{,}05^{\frac{3}{2}}) = 0{,}0417 \text{ Cubikmeter.}$$

Unter Anwendung der gewöhnlich gebräuchlichen Formel

$$Q = \mu b\,(H-h)\sqrt{2g\left(\frac{H+h}{2}\right)}$$

liefert die Tabelle $\mu = \dfrac{0{,}585 + 0{,}605}{2} = 0{,}595$, daher ist

$$Q = 0{,}595 \times 0{,}30 \times 0{,}15 \times 4{,}43\sqrt{0{,}125} = 0{,}0418 \text{ Cubikmeter.}$$

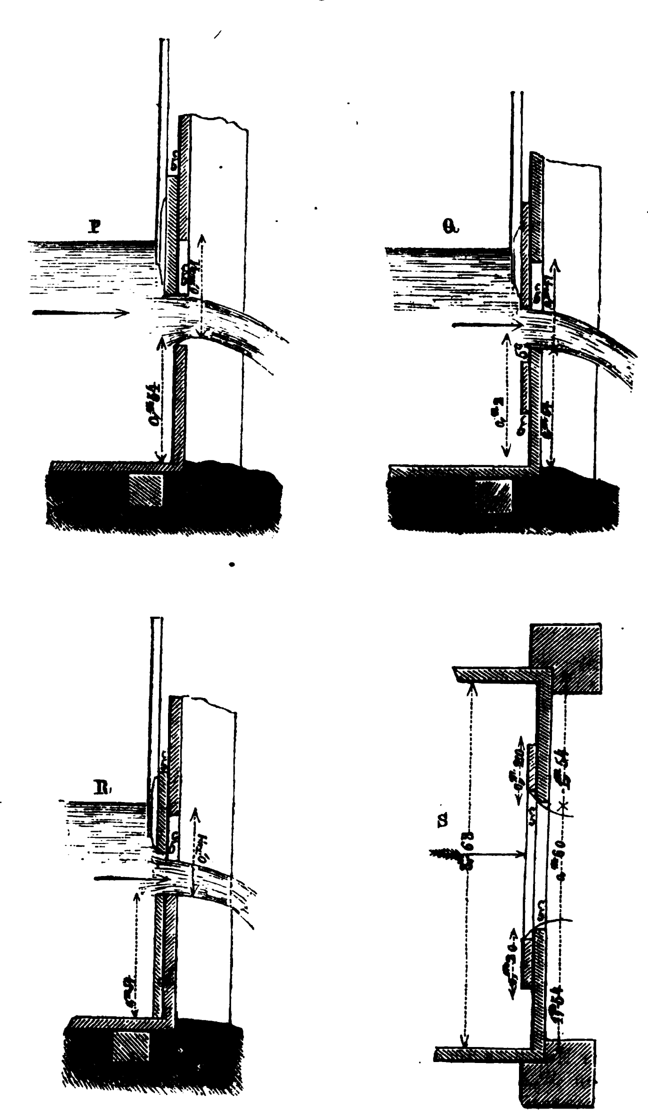
§. 92.

Ausfluß durch Oeffnungen in Wänden von bestimmter Dicke.

Um den Ausfluß durch Oeffnungen in Wänden von einer Dicke, wie solche in der Praxis vorkommen, richtig abzuschätzen, hat Lesbros Versuche über den Ausfluß bei Schützenöffnungen angestellt, wie sie Fig. 98 in *P*, *Q*, *R* und *S* abgebildet sind. *)

*) Letztere Figur ist eigentlich nur der Grundriß von Figur *Q*, entspricht jedoch zugleich ganz dem Grundrisse von *R*, so wie dem von *P*, wenn man sich, in letzterem Falle, die Bohle unterhalb der horizontalen Mündungsbasis entfernt denkt. Bei der Anordnung *C* sind die beiden verticalen Seiten und die Basis der Mündung im Abstande von 5 Centimeter mit Bohlenstücken von $0^m,20$ Breite und $0^m,05$ Dicke umgeben. Die Anordnung *D* unterscheidet sich von der *C* nur dadurch, daß das Bohlenstück unter der Mündungsbasis mit letzterer bündig liegt, so daß die Wanddicke daselbst $0^m,10$ beträgt.

Fig. 98.



Tabelle

der Ausflußcoefficienten der Formel $Q = b(H-h)\sqrt{2g\left(\frac{H+h}{2}\right)}$, für eine Seitenöffnung von $0^m,6$ Breite und verschiedenen Höhen, in einer Wand von $0^m,05$ Dicke befindlich und mündend in die freie Luft. Die Druckhöhe unmittelbar an der Mündung gemessen.

Druckhöhe über der oberen Kante der Mündung in Metern	Die Höhe der Mündung beträgt, mit Bezug auf Fig. 98, *P*, *Q* und *R*:											
	$0^m,40$			$0^m,20$			$0^m,05$			$0^m,03$		
	P	*Q*	*R* *)	*P*	*Q*	*R*	*P*	*Q*	*R*	*P*	*Q*	*R*
0,10	0,598	0,644	0,648	0,634	0,665	0,668	0,691	0,664	0,666	0,710	0,694	0,696
0,20	0,609	0,653	0,657	0,640	0,672	0,675	0,685	0,687	0,688	0,696	0,704	0,706
0,24	0,612	0,655	0,659	0,641	0,674	0,677	0,684	0,690	0,692	0,694	0,706	0,708
0,30	0,616	0,656	0,660	0,641	0,675	0,678	0,683	0,693	0,695	0,692	0,709	0,711
0,60	0,618	0,649	0,653	0,640	0,676	0,679	0,678	0,695	0,697	0,688	0,710	0,712
1,00	0,608	0,632	0,634	0,638	0,674	0,676	0,673	0,694	0,695	0,680	0,704	0,705
1,30	0,602	0,624	0,626	0,637	0,673	0,675	0,672	0,693	0,694	0,678	0,701	0,702
1,50	0,598	0,620	0,622	0,637	0,673	0,674	0,672	0,692	0,693	0,676	0,699	0,699
1,70	0,596	0,618	0,620	0,637	0,672	0,673	0,672	0,692	0,693	0,676	0,698	0,698
2,00	0,595	0,615	0,617	0,636	0,671	0,672	0,671	0,691	0,692	0,675	0,696	0,696
3,00	0,592	0,611	0,612	0,634	0,669	0,670	0,669	0,689	0,690	0,672	0,693	0,693

Die Ergebnisse dieser Tabelle stimmen zugleich mit den Resultaten anderer Experimentatoren über die sogenannte partielle Contraction §. 96. Lesbros führt in dieser Beziehung noch an, daß die Coefficienten der Tabelle jenen für die dünne Wand gefundenen gleich werden, sobald der Strahl die Mündungskanten nirgends berührt, was sich bei seinen Versuchen stets ereignete, sobald die Mündung oberhalb mit keinem Schutzbrette versehen oder die Dicke dieses Schützens an der unteren Kante auf eine Schneide reducirt war.

---

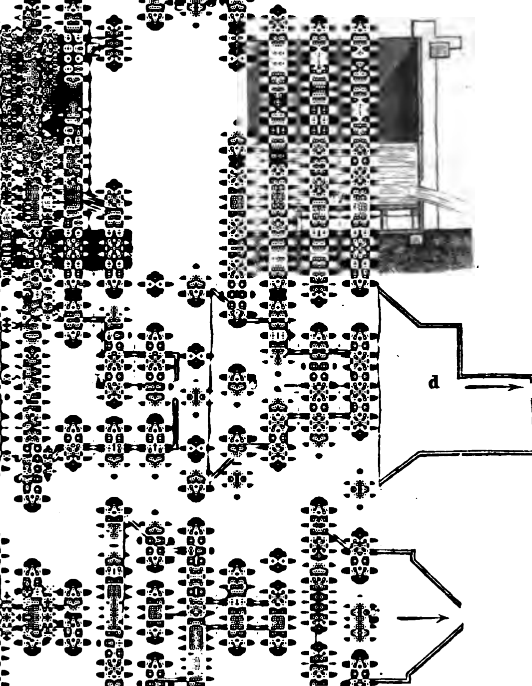
*) Diese Mündungsform entspricht ziemlich den Schützenöffnungen an den Schleusenthoren des Canales von Languedoc, für welche nach d'Aubuisson (Hydraulique §. 28) der Ausflußcoefficient $\mu = 0,625$ (Mittelwerth aus 8 Versuchen) bei Druckhöhen von $1^m,895$ bis $4^m,436$ über der Mitte der Mündung und für Höhen der letzteren von $0^m,46$ bis 0^m55 gefunden wurde. Zu bemerken ist jedoch, daß dabei die untere Mündungskante fast im Schleusenboden lag, während in obiger Tabelle diese Kante $0^m,54$ Entfernung vom Boden des Ausflußbehälters besaß, die größere Nähe der Kante am Boden aber eine Vergrößerung des Ausflußcoefficienten zur Folge haben mußte.

Gefäßwände.

age nach dem
wände auf das
esbros ebenfalls
Ergebniß zu-

nfluß sind,
flußöffnung
te der Mün-

t blos um so
n der Mün-
aufgehoben
enn sich die
n gedachten



[illegible] Anordnungen, [illegible] se) in folgender [illegible]

[illegible]

[illegible] fnung von $0^m,2$ [illegible] nd der Formel [illegible] im Behälter [illegible] sen.

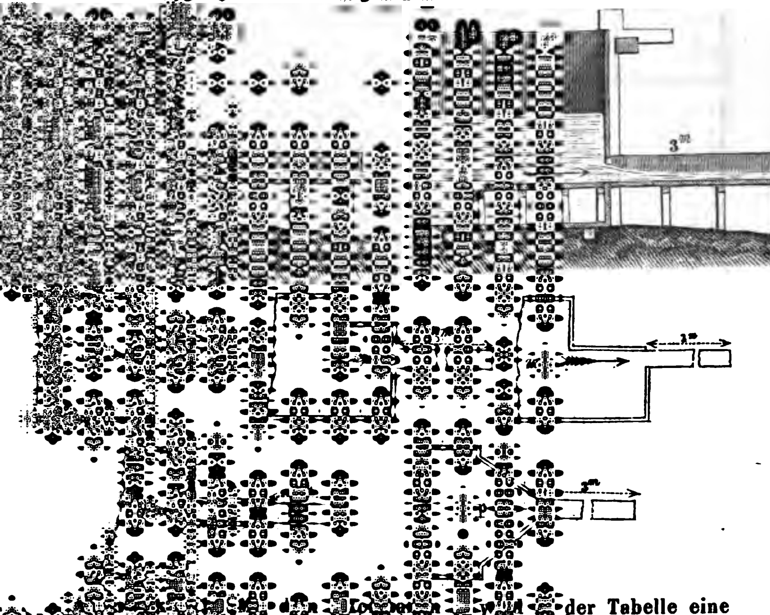
[illegible] frisse ist dabei [illegible]

[illegible]	A, f	B, g	A, g
	10	11	12
[illegible]	0,735	0,697	0,614
[illegible]	0,696	0,668	0,602
[illegible]	0,665	0,646	0,599
[illegible]	0,652	0,643	0,601
[illegible]	0,645	0,647	0,607
[illegible]	0,640	0,646	0,611
[illegible]	0,638	0,643	0,611
[illegible]	0,638	0,642	0,611
[illegible]	0,636	0,640	0,610
[illegible]	0,633	0,637	0,608
[illegible]	—	—	—
[illegible]	—	—	—
[illegible]	—	—	—
[illegible]	—	—	—
[illegible]	—	—	—
[illegible]	—	—	—
[illegible]	—	—	—
[illegible]	—	—	—
[illegible]	—	—	—
[illegible]	—	—	—
[illegible]	0,725	0,809	0,664
[illegible]	0,676	0,729	0,645
[illegible]	0,656	0,695	0,637
[illegible]	0,647	0,685	0,633
[illegible]	0,642	0,679	0,631
[illegible]	0,640	0,672	0,630
[illegible]	0,629	0,670	0,627
[illegible]	0,624	0,670	0,620
[illegible]	0,621	0,669	0,616
[illegible]	0,616	0,669	0,610

außerhalb

enöffnung mit
rze Gerinne,
ollständig ein-
Festungs- und
hen die Aus-
eringen Druck-
on etwa 1 Meter
Verminderung

che haben mit
nachfolgender
rd. *)



der Tabelle eine
alters der von D,
ein Gerinne von
nne aller übrigen

…eite, außerhalb …on 0m,2 Breite … $\frac{H+h}{2}$), dabei … Ausfluß-

…nd und Aufriß … von

E, m	E, n	C, E, n*)
24	25	26
,584	0,769	0,563
,575	0,727	0,560
,574	0,670	0,578
,583	0,638	0,602
,596	0,639	0,617
,610	0,640	0,626
,617	0,641	0,629
,617	0,643	0,628
,616	0,643	0,626
,613	0,641	0,623
,666	0,779	0,584
,634	0,677	0,599
,637	0,656	0,625
,647	0,654	0,638
,653	0,655	0,630
,652	0,657	0,637
,651	0,657	0,635
,652	0,657	0,635
,651	0,656	0,633
,647	0,653	0,632
,733	0,706	0,627
,718	0,701	0,668
,712	0,706	0,702
,708	0,707	0,700
,702	0,702	0,681
,700	0,699	0,669
,699	0,699	0,661
,696	0,699	0,653
,694	0,698	0,650
,691	0,697	0,647

…cheren Original-

Zusatz 1. Um den Einfluß der Neigung eines Gerinnes auf die Ausflußcoefficienten kennen zu lernen, hat Lesbros*) Versuche mit einer Gefäß- und Gerinnanordnung angestellt, welche der Zusammenstellung *D*, *n* Fig. 97 entspricht.

Bezeichnet μ_1 den Ausflußcoefficienten für eine Mündung mit außerhalb unter bestimmter Neigung angebrachten Gerinne, μ dagegen den betreffenden Coefficienten ohne Vorhandensein irgend eines Gerinne, wenn die Figur der Zusammenstellung *B*, *e*, Fig. 96, entspricht und endlich Δ ein Werth, welcher aus nachfolgender Tabelle zu entnehmen ist, so läßt sich überhaupt setzen:

$$\mu_1 = \frac{\mu}{1+\Delta}.$$

Gerinne		Druckhöhen über der oberen Kante der quadratischen Mündung von $0^m,20$ Seite		Werthe von Δ	
Länge	Neigung gegen den Horizont	Grössten Druckhöhen	Kleinsten Druckhöhen	Grössten Druckhöhen	Kleinsten Druckhöhen
Meter		Meter	Meter		
3,00	$\frac{1}{20}$	1,00	0,11	0,054	0,214
3,00	$\frac{1}{15}$	—	0,11	—	0,207
1,24	$\frac{1}{5,24}$	1,52	0,11	0,006	0,116
0,74	$\frac{1}{2,9}$	1,17	0,11	0,000	0,057
0,15	$\frac{1}{2,9}$	—	0,11	—	0,000
2,25	Null	—	0,11	—	0,134

Aus Allem erhellt jetzt der wichtige Satz: »daß es zur Berechnung der durch eine bestimmte Schützenöffnung fließende Wassermenge unumgänglich nothwendig ist, gleichzeitig die Anordnungen des Ausflußbehälters, die Mündung und die Neigung des Gerinnes (vor der Mündung) ins Auge zu fassen.«

Beispiel. Wie groß ist der Ausflußcoefficient μ für eine quadratische Mündung in dünner Wand von $0^m,20$ Seitenlänge, bei $0^m,11$ Druckhöhe über den Scheitel der Mündung, wenn außerhalb der

*) a. a. O. Nr. 261.

letzteren ein Gerinne $0^m,74$ Länge und $\frac{1}{16}$° Neigung gegen den Horizont angebracht, die Anwendung des Behälters aber die *B*, *e* von Fig. 96 ist?

Auflösung. Mit Bezug auf *B*, *e* Fig. 96 giebt die Tabelle, §. 93, zuerst $\mu = 0{,}703$, während die hier unmittelbar vorstehende Tabelle $\Delta = 0{,}057$ liefert, so daß für μ_1 folgt:

$$\mu_1 = \frac{\mu}{1+\Delta} = \frac{0{,}703}{1{,}057} = 0{,}665.$$

Zusatz 2. Geneigte Schützenöffnungen. Beobachtungen über den Ausfluß des Wassers aus gegen den Horizont geneigten Schützenöffnungen, bei Anordnungen, wie sie Fig. 99 und Fig. 100 erkennen lassen, haben im Allgemeinen gelehrt, daß durch dieselben, unter sonst gleich Umständen, der Ausflußcoefficient vergrößert wird. Die Ursache hiervon liegt in der Construction derselben, wodurch die Contraction an mehreren Seiten der Ausflußöffnung aufgehoben wird. (Man sehe hierüber §. 96.)

Fig. 99.

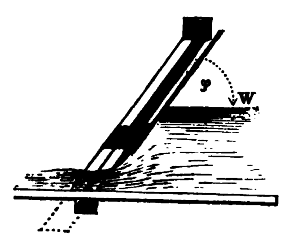
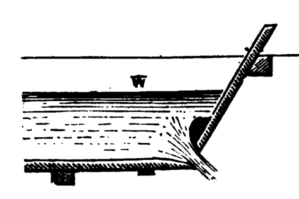


Fig. 99 zeigt den von Poncelet bei seinen Wasserrädern angewandten Schützen und die von ihm deshalb angestellten Beobachtungen *) geben

$\mu = 0{,}80$, wenn der Neigungswinkel des Schützens $\varphi = 45$ Grad (1 Basis auf 1 Höhe);

$\mu = 0{,}75$, wenn der Neigungswinkel des Schützens $\varphi = 63\frac{1}{3}$ Grad (1 Basis auf 2 Höhe).

Fig. 100.



Die Anordnung, Fig. 100, ist ein bei oberschlägigen Wasserrädern gebräuchlicher Schütze **) (Freiberger Spannschütze), wobei man $\mu = 0{,}77$ setzen kann.

Zusatz 3. Die Bestimmung der Geschwindigkeit des Wassers in Gerinnen von geringer Länge, ist ein Gegenstand, welcher bei Anordnung der Wasserräder von nicht geringer Wichtigkeit ist. Navier ***) betrachtete hierzu das Gerinne wie eine kurze am Gefäße angebrachte

*) Mémoire sur les roues hydrauliques à aubes courbes etc. Metz 1827, §. 78.

**) Jahrbuch (Freiberger) für den Berg- und Hüttenmann. Jahrgang 1844. S. 22.

***) Architecture hydraulique de Bélidor (nouvelle édition) note dn §. 3, p. 424.

Ansatzröhre (§. 98) und nahm den Ausflußcoefficienten allein von der Wasserdruckhöhe abhängig an. Lesbros *) fand jedoch bei seinen neuesten Versuchen, daß der Ausflußcoefficient nicht allein von letzterer Größe, sondern insbesondere auch von der Stelle des Gerinnes abhängig ist, wo man die Geschwindigkeit angeben will, von der Anordnung des Ausflußbehälters und Gerinnes und endlich von der Höhe der Mündung. Dieser Complication der Umstände wegen räth Lesbros (für sehr genaue Arbeiten) diese Geschwindigkeit in jedem besonderen Falle auf directem Wege, d. h. durch Division der Wassermenge durch den Strahlquerschnitt für die Stelle zu bestimmen, woselbst man die Geschwindigkeit kennen lernen will.

Poncelet fand bei seinen Schützen (Fig. 99), daß an der Stelle der größten Zusammenziehung des Strahles (vor der Mündung) der Geschwindigkeitscoefficient ψ im Mitttel zu setzen sei **):

$$\psi = 0{,}9274.$$

Zur noch besseren Beurtheilung des fraglichen Gegenstandes, so wie auch um für manche practische Fälle wenigstens approximative Bestimmungen machen zu können, folgt hier eine den Versuchen Lesbros ***) entlehnte Tabelle, wobei die Anordnungen der Ausflußgefäße (Behälter) und der horizontalen Gerinne, jene *D*, *k* und *D*, *n* von Fig. 97 waren.

---

*) a. a. O. Nr. 246.
**) a. a. O. Nr. 46.
***) a. a. O. Nr. 266.

Quadratische Mündung von $0^m,20$ Seite.									Rectanguläre Mündung von $0^m,05$ Höhe und $0^m,20$ Breite.	
Anordnung *D*, *k* Fig. 97.					Anordnung *D*, *n* Fig. 97.				Anordnung *D*, *k* Fig. 97.	
Druckhöhe über der Mitte der Ausflußöffnung	Verhältniß der wirklichen Geschwindigkeit im Gerinne zur Geschwindigkeit, welche der Druckhöhe entspricht, wenn die Entfernung abwärts von der Mündung beträgt:				Druckhöhe über der Mitte der Ausflußöffnung	Verhältniß der wirklichen Geschwindigkeit im Gerinne zur Geschwindigkeit, welche der Druckhöhe entspricht, wenn die Entfernung abwärts von der Mündung beträgt:			Druckhöhe über der Mitte der Ausflußöffnung	Verhältniß der wirklichen Geschwindigkeit im Gerinne zur Geschwindigkeit, welche der Druckhöhe entspricht, wenn die Entfernung abwärts von der Mündung ist:
Meter	$0^m,05$	$0^m,06$	$0^m,07$	$0^m,08$	Meter	$0^m,09$	$0^m,36$	$0^m,95$	Meter	$0^m,0565$
0,4005	0,8232	0,8651	0,8687	0,8842	0,9105	0,8595	0,9841	0,9643	0,2125	0,9694
0,2440	0,8022	0,8381	0,8475	0,8561	0,4005	0,8657	0,9223	0,9036	0,1058	0,9475
0,1220	0,7202	0,7297	0,7443	0,7569	0,2420	—	0,8771	0,8488	—	—

Anmerkung. Hier würde vielleicht der passendste Ort gewesen sein, den Einfluß zu erörtern, welche zwei unmittelbar neben einander liegende Mündungen auf die Menge des ausfließenden Wassers ausüben, wenn nicht das Resultat der zur Zeit hierüber angestellten Versuche geradezu widerstreitend wäre. Man lese deshalb den d'Aubuisson'schen Bericht über die Versuche von Lespinasse und Castel. *)

§. 95.

Mündungen unter Wasser.

Wir betrachten zuerst den Fall, Fig. 101, des betreffenden Ausflusses, wo vor der Mündung, in einem Gerinne, durch einen Einbau (Schwelle, Wasserrad) ein künstliches Hinderniß angebracht und demzufolge ein Anschwellen (Stau) des Wassers erzeugt ist.

Fig. 101.

Hierzu sei A der Querschnitt des Ausflußbehälters MN, Fig. 101, ω der Querschnitt der Mündung, Ω der Querschnitt des Wasserstrahles im Gerinne und zwar an einer Stelle, wo der Beharrungszustand ziemlich wieder eingetreten und der Parallelismus der Schichten als (beinah) wieder vorhanden anzunehmen ist. Ferner sei h die Druckhöhe im Behälter über der oberen Kante der Mündung, η der Abstand des Wasserspiegels im Querschnitte Ω von derselben Mündungskante, so daß $h-\eta$ die Höhendifferenz der Wasserspiegel im Behälter und Gerinne darstellt **), endlich mögen die Geschwindigkeiten in den Querschnitten A, ω und Ω respective mit V, v und U bezeichnet werden.

Sodann liefert aber das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte unmittelbar die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}M(U^2-V^2)+\tfrac{1}{2}M(v-U)^2=gM(h-\eta).$$

*) Traité d'hydraulique. Nr. 29—31.

**) Man wird leicht erkennen, daß diese Größe $(h-\eta)$ dieselbe bleibt, wenn h und η die Schwerpunctsabstände der Querschnitte ω und Ω von dem Ober- und respective Unter-Wasserspiegel bezeichneten.

Ferner ist $V = \frac{\Omega U}{A}$; $v = \frac{\Omega U}{\alpha\omega}$, daher und wenn man durch die Masse M dividirt:

$$\tfrac{1}{2} U^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{A^2}\right) + \tfrac{1}{2} U^2 \left(\frac{\Omega}{\alpha\omega} - 1\right)^2 = g(h - \eta).$$

Setzt man wie gewöhnlich A sehr groß gegen Ω voraus, so kann man $\frac{\Omega}{A}$ vernachlässigen, also schreiben:

$$U^2 \left\{1 + \left(\frac{\Omega}{\alpha\omega} - 1\right)^2\right\} = 2g(h - \eta), \text{ woraus}$$

$$U = \sqrt{\frac{2g(h-\eta)}{1 + \left(\frac{\Omega}{\alpha\omega} - 1\right)^2}}.$$

Die pr. Secunde ausfließende Wassermenge $= Q$ ergiebt sich sonach zu:

$$\text{I.} \quad Q = \Omega \sqrt{\frac{2g(h-\eta)}{1 + \left(\frac{\Omega}{\alpha\omega} - 1\right)^2}},$$

eine Gleichung, welche zuerst von Poncelet*) entwickelt wurde.

Ist $\Omega = \omega$ zu setzen, so folgt:

$$\text{II.} \quad Q = \Omega \sqrt{\frac{2g(h-\eta)}{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2}}. \text{**)}$$

Bezeichnet man endlich den Werth $\sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2}}$ mit m, so ergiebt sich noch

$$\text{III.} \quad Q = m\Omega \sqrt{2g(h-\eta)},$$

*) Cours de Mécanique. Sect. VI. Nr. 60.

**) Setzt man hier $\alpha = 0{,}64$, so folgt
$Q = 0{,}872 \sqrt{2g(h-\eta)}$, so wie sich ergiebt:
$Q = 0{,}860 \sqrt{2g(h-\eta)}$, wenn $\alpha = \mu = 0{,}63$,
$Q = 0{,}840 \sqrt{2g(h-\eta)}$, wenn $\alpha = \mu = 0{,}61$
angenommen wird. Dubuat (Principes d'hydraulique, Tome I., p. 263) fand: $Q = 0{,}815 \sqrt{2g(h-\eta)}$.

ein Ausdruck, welcher mit dem §. 74 für Bodenmündungen gefundenen übereinstimmt.

Lesbros hat auch über diesen für die Praxis wichtigen Gegenstand Versuche angestellt und dabei die überraschendste Uebereinstimmung der Formel I. mit der Erfahrung gefunden, sobald man nur daselbst α durch den Ausflußcoefficienten μ S. 206 ersetzt, welcher der Formel $Q = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} \left\{ H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}} \right\}$ entspricht.

Wir entnehmen diesen Versuchen folgende Zusammenstellung, welche sich übrigens auf die Anordnung von *C*, *k* Fig. 97 bezieht. *)

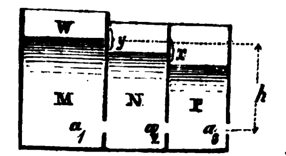
Nr. der Lesbros Versuche	h	η	ω	Ω	μ	Wassermenge berechnet $= Q$	Wassermenge beobachtet $= Q_1$	$\frac{Q_1}{Q}$	Bemerkungen.
1634	0^m,0808	0^m,0326	$0^{\square m}$,010	$0^{\square m}$,01652	0,6297	8,4249	8,9100	1,0554	Der Stau erreichte nicht den zusammengezogenen Strahl.
1637	0,0808	0,0363	0,010	0,01626	0,6297	8,116	8,518	1,0494	Der Stau erstreckte sich nicht bis zum Schwerpunct der Mündung.
1641	0,0808	0,0434	0,010	0,10868	0,6297	7,2571	8,044	1,1092	Der Stau füllte die Ecken der Mündung und bespülte deren obere Kante.
1658	0,0216	0,0178	0,010	0,01356	0,6247	2,40472	2,444	1,006	Der Stau reichte über die Mündung der oberen Kante.

Die Werthe für h sind an einer Stelle gemessen, wo der Oberwasserspiegel völlig ruhig war. Die Werthe η sind zugleich die Abstände der höchsten Staustelle von der oberen Kante der Mündung.

Zusatz. Für den Beharrungszustand des Durchflusses einer constanten Wassermenge Q durch rectanguläre Seitenöffnungen

*) a. a. O. Nr. 277 und besonders Tabelle XVIII. p. 407.

Fig. 102.



dreier oben offener Gefäße M, N, P, Fig. 102, unter der Voraussetzung, daß die Mündungsinhalte a_1, a_2, a_3 sehr klein sind in Bezug auf die Querschnitte der respectiven Gefäße, läßt sich nach dem Vorstehenden, als für die Praxis genau genug, setzen:

$$Q = \mu a_1 \sqrt{2gy} = \mu a_2 \sqrt{2gx} = \mu a_3 \sqrt{2g(h-x-y)}.$$

Hierbei bezeichnet y die Differenz der Wasserspiegel in den Gefäßen M und N, x eben diese Differenz für die Gefäße N und P, so wie h den Schwerpunctsabstand der äußersten Mündung a_3 über dem Wasserspiegel im Gefäße M.

Hiernach ist

$$y = \frac{Q^2}{2g(\mu a_1)^2};\ x = \frac{Q^2}{2g(\mu a_2)^2};\ h - x - y = \frac{Q^2}{2g(\mu a_3)^2},$$

so wie

$$h = \frac{Q^2}{2g}\left[\frac{1}{(\mu a_1)^2} + \frac{1}{(\mu a_2)^2} + \frac{1}{(\mu a_3)^2},\right]$$

und endlich:

$$Q = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{1}{(\mu a_1)^2} + \frac{1}{(\mu a_2)^2} + \frac{1}{(\mu a_3)^2}}}.$$

§. 96.

Partielle Contraction.

Begriff und Wirkung partieller Contraction wurden bereits §. 72, Nr. 4, erörtert und bei Lesbros Versuchen über den Ausfluß durch Schützenöffnungen (auch bei den Poncelet- und Freiberger Spann-Schützen) auf die Vortheile aufmerksam gemacht, welche sich hinsichtlich der Vermehrung der Wassermenge herausstellen, sobald die Contraction des Wasserstrahles an einer oder mehreren Stellen aufgehoben ist.

Die ersten ausführlichen Versuche über diesen Gegenstand verdankt man dem italienischen Hydrauliker Bidone, der sie an demselben hydraulischen Etablissement anstellte, welches bereits die beiden Michelotti's (§. 88) benutzten. Die Resultate seiner Versuche paßte er der analytischen Form an:

$$\mu_{\frac{n}{p}} = \mu\left(1 + A\frac{n}{p}\right). \text{*)}$$

Hierbei bezeichnet $\mu_{\frac{n}{p}}$ den gesuchten Ausflußcoefficienten der partiellen Contraction, μ den Ausflußcoefficienten der vollkommenen Contraction unter sonst gleichen Umständen vorausgesetzt. Ferner bezeichnet n den Theil des ganzen Mündungsperimeters p, woselbst die Contraction aufgehoben ist und endlich A einen Coefficienten, der mit der Mündungsform als veränderlich vorausgesetzt wurde.

Die Vergleichung der Versuche mit obigem Ausdrucke führten zu den Gleichungen:

I. $\mu_{\frac{n}{p}} \quad \mu\left(1 + 0{,}1523\frac{n}{p}\right)$ für rectanguläre Mündungen,

II. $\mu_{\frac{n}{p}} = \mu\left(1 + 0{,}1280.\frac{n}{p}\right)$ für kreisförmige Mündungen.

Außer Bidone hat nur noch Weisbach **) directe Versuche über partielle Contraction angestellt, welche

III. $\mu_{\frac{n}{p}} = \mu\left(1 + 0{,}1343\frac{n}{p}\right)$ für rectanguläre Mündungen

lieferten.

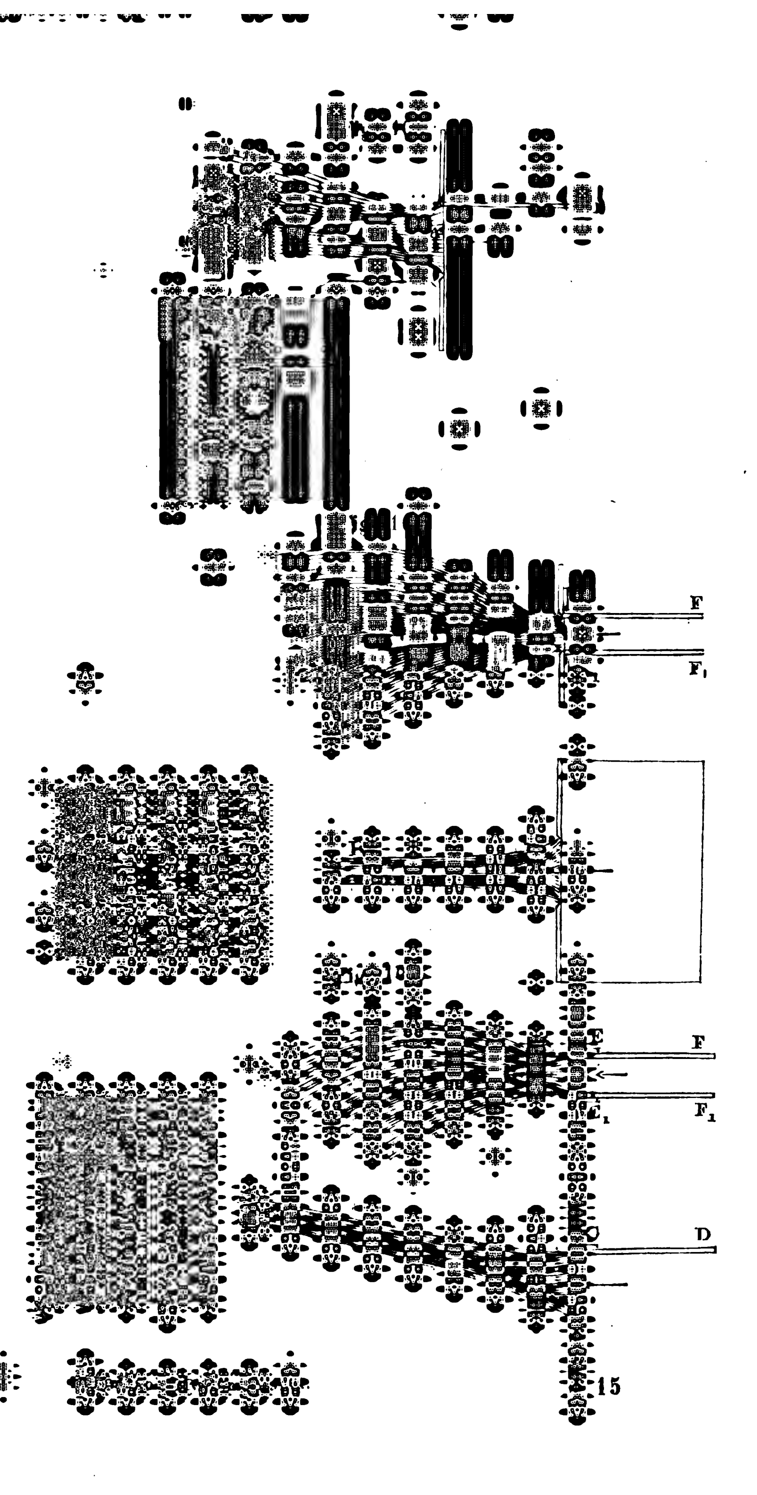
Im Allgemeinen giebt die theilweise Einfassung einer Ausflußöffnung, um eben die Contraction partiell zu machen, dem Strahle eine schiefe von der Normale zur Ebene der Ausflußöffnung abweichende Richtung und zerstreut den Strahl auch mehr, als dies bei vollkommener Contraction der Fall ist.

Zur noch besseren Beurtheilung des Ganzen werden Fig. 103 bis Fig. 105 dienen, welche den Weisbach'schen Versuchen mit rectangulären Mündungen entlehnt sind.

---

*) Memorie etc. di Torino, Tomo XL, p. 1 (1831) und im Auszuge hieraus: Maschinenencyclopädie, Artikel „Ausfluß" (von Weisbach), Seite 468.

**) Untersuchungen, 2. Abtheilung, Seite 143.


F
F1
E
F
F1
E1
D
15

Bei der Anordnung, Fig. 103, war die Contraction nur an der oberen schmalen Seite *CD* aufgehoben und es floß der Strahl *AB* zwar noch hell aus, wurde aber auf der eingefaßten Seite *CD*, 7½ bis 9 Grad von der Normale der Mündungsebene zur Seite gedrückt. Wurde die Mündung wie Fig. 104 gestaltet, d. h. die Contraction an den beiden langen Seiten *EE* und E_1E_1 aufgehoben, so floß der Strahl wenig hell aus und hatte stark abgerundete Kanten. Bei der Anordnung, Fig. 105, war die Contraction an drei Seiten aufgehoben, nämlich auf den beiden langen Seiten *EE* und E_1E_1 und auf einer kurzen Seite *CC*.

Wenn endlich dieselbe rectanguläre Mündung, bei der Lage der Seiten von Fig. 104, auf allen vier Seiten, also an ihrem ganzen Umfange, eingefaßt wurde, verlor der Strahl seine regelmäßige Form, es floß das Wasser ganz stoßweise und in zerrissenen Fäden divergirend aus.

Beispiel. Bei der rectangulären Mündung, Fig. 103 bis Fig. 105, hatte jede lange Seite 5,0 Centimeter und jede kurze Seite 2,5 Centimeter Länge, es fragt sich, wie sich hiernach die Werthe der Bidone'schen Formel I. gestalten?

Auflösung. Allgemein ist hier $p = 15,0$, ferner

$$n = 2,5;\ \frac{n}{p} = \frac{25}{150} = \frac{1}{6};\ \text{daher}\ \mu_{\frac{1}{6}} = 1,0254\,.\,\mu\ \text{bei Fig. 103;}$$

$$n = 10,0;\ \frac{n}{p} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3};\ \text{daher}\ \mu_{\frac{2}{3}} = 1,1015\,.\,\mu\ \text{bei Fig. 104;}$$

$$n = 12,5;\ \frac{n}{p} = \frac{125}{150} = \frac{5}{6};\ \text{daher}\ \mu_{\frac{5}{6}} = 1,1269\,.\,\mu\ \text{bei Fig. 105.}$$

§. 97.

Unvollkommene Contraction.

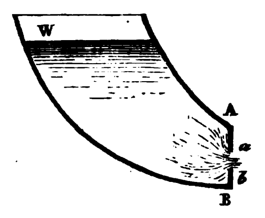
Auch dieser zuerst von Weisbach unter gesetzliche Form gebrachten *) und von ihm mit vorstehendem Namen belegten

*) Bemerkenswerth dürfte es sein, daß die Weisbach'schen Sätze über unvollkommene Contraction den Ergebnissen der französischen Experimentatoren (selbst Lesbros nicht ausgenommen) weit voranstehen und daß Weisbach bereits das Gesetz der ganzen Erscheinung aufgefunden haben dürfte, was Andere nur zu ahnen scheinen.

Contraction ist bereits §. 72 unter Nr. 5 hinlänglich gedacht und auf ihre Wirkung, die Ausflußmenge unter sonst gleichen Umständen zu vermehren, aufmerksam gemacht worden.

Bezeichnet μ_m den Ausflußcoefficienten bei unvollkommener Contraction, x das Querschnittsverhältniß der Mündung $ab = a$ Fig. 106, zum Querschnitt A des vor dieser ankommenden Wassers, also $x = \frac{a}{A}$ und μ wiederum den der vollständigen Contraction entsprechenden Ausflußcoefficienten, so hat man nach Weisbach:

Fig. 106.



$$\mu_m = \mu \left\{ 1 + 0{,}04564[(14{,}821)^x - 1] \right\}$$ für kreisförmige Mündungen;*)

$$\mu_m = \mu \left\{ 1 + 0{,}076(9^x - 1) \right\}$$ für rectanguläre Mündungen.**)

Zur Ersparung der Rechnung nach vorstehenden Formeln können folgende Tabellen dienen, wobei λ den Factor von μ bezeichnet.***)

I. Kreisförmige Mündungen.

x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
λ	1,007	1,014	1,023	1,034	1,045	1,059	1,075	1,092	1,112	1,134
x	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
λ	1,161	1,189	1,223	1,260	1,303	1,351	1,408	1,471	1,546	1,613

*) Untersuchungen, Abtheilung S. 52.

**) a. a. O. S. 91.

***) Ingenieur-Mechanik, Bd. 1, S. 514.

II. Rectanguläre Mündungen.

x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
λ	1,009	1,019	1,030	1,042	1,056	1,071	1,088	1,107	1,128	1,152
x	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
λ	1,178	1,208	1,241	1,278	1,319	1,365	1,416	1,473	1,537	1,608

Zusatz. Für rectanguläre Schützöffnungen, vor welchen das Wasser mit beträchtlicher Geschwindigkeit ankommt und die Druckhöhe nur im bewegten Wasser unmittelbar vor der Mündung gemessen werden kann, fanden wir I. [§. 86] zur Berechnung der durchfließenden Wassermenge Q:

$$Q = \tfrac{2}{3}\,\mu b \sqrt{2g}\left\{\left(H + \frac{c^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(h + \frac{c^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}.$$

Da hier c eine Function von Q, nämlich $c = \frac{Q}{A}$ ist, wenn A den Querschnitt des zufließenden Wasserstromes unmittelbar vor der Mündung bezeichnet, so führt die Auflösung dieser Gleichung zu umständlichen Rechnungen. Um letztere zu vermeiden, hat Weisbach aus seinen eigenen Versuchen die Formel abgeleitet: *)

$$Q = \mu\left[1 + 0{,}641\left(\frac{a}{A}\right)^2\right] a \sqrt{2g\left(\frac{H+h}{2}\right)},$$

wobei jedoch $\frac{a}{A}$ nicht viel über $\frac{1}{2}$ sein darf.

Zur nochmehrigen Abkürzung der Rechnungen kann folgende Tabelle dienen, in welcher der binomische Factor von μ mit k bezeichnet ist:

$\frac{a}{A}$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
k	1,002	1,006	1,014	1,026	1,040	1,058	1,079	1,103	1,130	1,160

*) Ingenieur-Mechanik. Bd. 1, S. 516.

e rectanguläre
e, wobei der
,0 Meter Tiefe
eicht und nur
Contraction an

unteren Kante
mit Bezug auf
0,605.

$+ 0,4 = 1,6.$

nd daher nach

$= 1^{\square m},2,$ also

$= 1,2 . 0,2 = 0,24$

ikmeter.

atzröhren.

nan eine Aus-
Fig. 107,
Wassergefäßes
cylindrischen
die etwa zwei
o lang als weit
der Strahl eine
an, als wenn
allein in der
nd angebracht
er Erfolg, unter
mständen, eine
in der Capillar-
und entfernter

im Luftdrucke. *) Aehnlich wie bei der dünnen Wand zieht sich zwar der Strahl zu einem weit kleineren Querschnitte *mm* wie der Mündungsquerschnitt *AA* zusammen, geht aber bald darauf wieder aus einander, und füllt endlich die Röhre völlig aus, so daß an der Ausflußstelle *BB* der Querschnitt des Wasserstrahles gleich dem Querschnitte der Röhre ist. Da demungeachtet die ausfließende Wassermenge nicht jene ist, welche dem Producte aus dem Querschnitte der Röhrenmündung *BB* in die zur Druckhöhe über der Röhrenaxe gehörige Geschwindigkeit entspricht, so folgt ohne Weiteres, daß bei dem fraglichen cylindrischen Ansatze der Geschwindigkeitscoefficient gleich dem Ausflußcoefficienten, also $\mu = \psi$, dagegen $\alpha = 1$ ist. Im Mittel kann $\mu = 0{,}815$ bis $0{,}82$ gesetzt werden.

Alle bis jetzt für Practiker brauchbare Resultate über den Ausfluß des Wassers durch cylindrische oder prismatische Ansatzröhren, sind auf dem Wege des Experimentirens gefunden worden, in welcher Beziehung hier einiges mitgetheilt werden soll.

Ueber den oben erwähnten Einfluß der Röhrenlänge auf die Ausflußmenge hat insbesondere Eytelwein vertrauenswerthe Versuche angestellt. **)

Die absolute Größe der Ausflußcoefficienten bei kurzen cylindrischen oder parallelepipedischen Ansatzröhren zeigt wenig Variationen, wie aus folgender Tabelle erhellt, die d'Aubuisson's Hydraulik ***) entlehnt und durch Hinzufügung der Weisbach'schen Versuche vervollständigt ist.

---

*) Für das mehr wissenschaftliche Studium fast aller, hier und in folgendem Paragraphen, behandelten Gegenstände, kann nicht genug ein Aufsatz von Feilitsch: „Ueber den Ausfluß der Flüssigkeiten aus Oeffnungen in dünner Wand und aus kurzen Ansatzröhren", empfohlen werden, der sich in Poggendorf's Annalen, Bd. 63, S. 1 und S. 224 vorfindet.

**) Handbuch der Mechanik etc. §. 98.

***) a. a. O. p. 49. D'Aubuisson nennt dabei die Contraction beim cylindrischen Ansatze eine innere, im Gegensatze zu der bei dünner Wand statt findenden, die er mit dem Namen äußere Contraction bezeichnet.

I. Cylindrische Ansatzröhren.

Beobachter	Der Ansatzröhre		Druckhöhe	Ausfluß-coefficient $\mu = \psi$
	Durchmesser	Länge		
	Meter	Meter	Meter	
Castel	0,0155	0,040	0,20	0,827
„	0,0155	0,040	0,48	0,829
„	0,0155	0,040	0,99	0,829
„	0,0155	0,040	2,00	0,829
„	0,0155	0,040	3,03	0,830
Bossut	0,0230	0,054	0,65	0,788
„	0,0230	0,054	1,24	0,787
Eytelwein . .	0,0260	0,078	0,72	0,821
Bossut	0,0270	0,041	3,85	0,804
„	0,0270	0,054	3,87	0,804
„	0,0270	0,108	3,92	0,804
Venturi	0,0410	0,123	0,88	0,822
Michelotti . .	0,0810	0,216	2,18	0,815
Weisbach *) .	0,0330	0,125	0,571	0,8175
„	0,0403	0,275	0,569	0,7822
„	0,01064	Ungefähr 3 mal so lang als weit	0,5780	0,8540
„	0,01064	—	0,2361	0,8509
„	0,01934	—	0,5762	0,8330
„	0,01934	—	0,2334	0,8323
„	0,02672	—	0,5748	0,8171
„	0,02672	—	0,2319	0,8129
„	0,03020	—	0,5749	0,8170
„	0,03020	—	0,2319	0,8165

II. Parallelepipedische Ansatzröhren.

Beobachter	Der Ansatzröhre			Druckhöhe	Ausfluß-coefficient $\mu = \psi$
	Höhe	Breite	Länge		
	Meter	Meter	Meter	Meter	
Michelotti . .	0,081	0,081	0,216	3,80	0,803
„	0,081	0,081	0,216	6,71	0,803
Weisbach . .	0,0191	0,04217	0,125	0,569	0,8194
„	0,02478	0,05018	0,320	0,576	0,7960

*) Untersuchungen, Abtheil. I. und II., S. 92 etc.

Die Weisbach'schen Versuche lassen besonders erkennen, daß der Ausflußcoefficient zunimmt, wenn der Mündungsdurchmesser kleiner wird. Hinsichtlich des Einflusses der Druckhöhe läßt sich weniger Bestimmtes sagen.

Zusatz 1. Ueber die Einwirkung der Länge cylindrischer Ansätze hat vorzüglich Eytelwein sorgfältige Versuche angestellt, welche im Allgemeinen das bereits oben Gesagte bestätigen.*)

Sämmtliche von Eytelwein benutzte Ansatzröhren hatten kreisförmigen Querschnitt und durchaus 1 Zoll (rheinisch) Durchmesser. Der prismatische Wasserbehälter, in dessen Seitenwand sie angebracht wurden, bildete im horizontalen Durchschnitte ein im Lichten 18,5 Zoll langes und 14,5 Zoll breites Rechteck. Die Versuche wurden bei veränderlicher Druckhöhe von anfänglich 36 Zoll bis 20,6 Zoll angestellt, wobei, in verschiedenen Zeiten, immer dieselbe Wassermasse, nämlich 4156 Cubikzoll ausfloß. Die Resultate dieser Versuche enthält folgende Tabelle:

Länge der Röhren in Zollen	$\frac{1}{24}$	1	3	12	24	36	48	60
Beobachtete Zeit des Ausflusses	$59\frac{1}{2}$	$59\frac{1}{2}$	$44\frac{3}{4}$	48	$50\frac{1}{2}$	54	58	61
Ausfluß-coefficient $= \mu$	0,6176	0,6176	0,8211	0,7655	0,7276	0,6804	0,6335	0,6024

Hieraus erkennt man ohne Weiteres:

1) daß wenn der cylindrische Ansatz noch nicht das Doppelte des Durchmessers beträgt, also noch nicht so lang ist, um über die Stelle hinwegzukommen, wo der Strahl die Ansatzröhre nicht füllt, der Ausfluß genau so wie bei einer Oeffnung in dünner Wand erfolgt;

2) daß wenn die Länge des cylindrischen Ansatzes im Verhältniß zu seinem Durchmesser beträchtlich wird, die Geschwindigkeit der Flüssigkeitstheilchen durch deren Anhängen an den Röhrenwänden eine bedeutende Verzögerung erfährt und bei noch größerer Länge der Einfluß der Ausbreitung des Wasserstrahles auf ein vermehrtes Ausflußquantum ganz wirkungslos wird.

Zusatz 2. Von den Versuchen, welche insbesondere zur Erklärung der Ursachen der Ausflußerscheinungen bei kurzen cylindrischen Ansätzen angestellt wurden, verdienen zuerst die des Italieners Venturi **) angeführt zu werden.

---

*) Hydraulik §. 98.
**) Gilb. Annalen (1799), Bd. 2, S. 418.

on 32½ pariser
us Seitenmün-
en und 30 Zoll
uptergebnisse

die Wand von
ebildet wurde,
en 4 Cubik-
aus. Durch
ung, von 15
gen 4 Cubik-
berdies durch
dünne Kupfer-
der Ausfluß-
sein:

Linien weit von
108, so flossen
4 Cubikfuß
Secunden
er cylindrische
ne Einfluß auf
ge, welche vor-
dünne Wand
sickerte durch
cht ein Tropfen
end aber auch
öhre nicht aus-
pfte darauf ein
m andern mit
zu. So lange
offen war, blieb
selbe; als aber
völf Löcher ver-
üllte der Was-
hre wieder aus
abermals 4 Cu-
in 31 Secunden

indrische Röhre
von abermals 18
sser, jedoch 57
wurde 8 Linien
Glasröhre *QRS*
en unteres Ende
auchte, welches
Wasser gefüllt
Anordnung der
g flossen 4 Cu-
sser wiederum
aus; dabei stieg

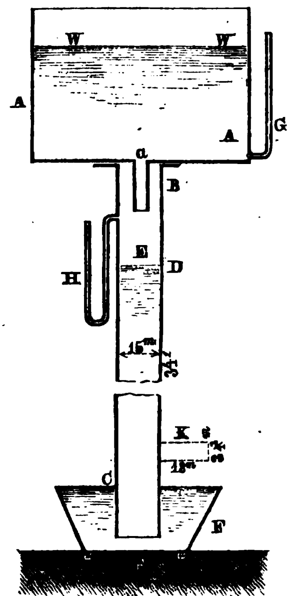
aber das gefärbte Wasser in der Röhre *SR* auf 24 Zoll Höhe über dem Spiegel des Wassers in *T* hinan.

Wurde hierauf der Arm *RS* der Glasröhre so weit verkürzt, daß er nur 6 Zoll länger als *RQ* blieb, so stieg das gefärbte Wasser beim Ausflusse die ganze Glasröhre *SR* hinan, vermischte sich mit dem durch *KV* strömenden Wasserstrahle und floß mit demselben durch *V* ab, so daß in kurzer Zeit das Gefäß *T* ausgeleert war.

d. In einem cylindrischen Gefäße, das 4,5 Zoll weit war, wurde unweit des Bodens, in der senkrechten Seitenfläche, eine Blechplatte mit einer kreisförmigen Oeffnung von 4,5 Zoll Durchmesser eingesetzt. Als dies Gefäß, bis zu einer Höhe von 8,3 Zoll über dem Mittelpuncte der Oeffnung, mit Wasser gefüllt wurde, senkte sich der Wasserspiegel beim Ausfließen durch die Oeffnung um 7 Zoll in einer Zeit von 27,5 Secunden. Als man an diese Oeffnung eine eben so weite, 11 Linien lange cylindrische Röhre ansetzte, erfolgte die Senkung um 7 Zoll in der Zeit von 21 Secunden.

Wiederholte man hierauf diesen Versuch unter dem Recipienten einer Luftpumpe, in welchem das Quecksilbermanometer nur noch 10 Linien hoch stand, so senkte sich hier der Wasserspiegel im Gefäße um 7 Zoll, stets in der Zeit von 27,5 Secunden, gleichgültig ob die Oeffnung blos von einer dünnen Platte gebildet oder mit einer cylindrischen Ansatzröhre versehen war.

Fig. 110.



Zusatz 3. Aehnliche Versuche wie Venturi's sind unter andern von Matthieu Young und Hachette angestellt worden *), aus denen übereinstimmend hervorgeht, daß sich, bei kurzen cylindrischen Ansätzen, welche außerhalb der Gefäße angebracht werden, die Ausflußmenge mit dem Drucke der Luft vermindert.

Nach Buff's **) Versuchen findet ebenfalls eine Vermehrung des Ausflusses durch kurze cylindrische Ansätze nicht statt, wenn sich der Strahl in einen luftleeren Raum ergießt.

Wegen des höchst sinnreichen Verfahrens, mittelst welchem Buff zu diesen Resultaten gelangte, werde hier versucht zur Beschreibung seines Versuchsapparates die fehlende Abbildung in Fig. 110 zu liefern. *AA* ist ein genau cylindrisches Blechgefäß von etwa $1\frac{1}{2}$ Fuß Höhe mit einem langen Rohre *BC* von 34 Fuß (pariser) Höhe in Verbindung gesetzt. An der Seite

*) Annales de Chimie et de Physique, Tome III. (1816), p. 88, so wie auch Feilitsch in Poggend. A. Bd. 63 (1844), S. 236.

**) P. A. Bd. 46 (1839), S. 240.

des Gefäßes A befand sich ein mit dessen Innerem communicirendes Glasrohr G um die Wasserstandshöhe zu messen. Am oberen Ende des Rohres BC communicirte mit dem inneren Theile desselben ein Quecksilbermanometer H (§. 50), dessen Stand während des Versuches die Größe des Luftdruckes im Raume E anzeigt, welcher nach §. 69, Fig. 65, eine Art von Toricellische Leere bilden mußte, sobald BC länger als $10^m,336 = 31,818$ pariser Fuß war und das untere Ende des Rohres BC in ein mit Wasser ganz angefülltes Gefäß tauchte. Wurde nun im Boden von A ein cylindrisches Ansatzrohr a von 18 Linien Länge und $3\frac{3}{4}$ Linien Durchmesser angebracht, durch welches das Wasser aus A in den luftverdünnten (beinah luftleeren) Raum strömte, so ergab sich als Mittelwerth der Ausflußcoefficient zu 0,6458, d. h. wie für die dünne Wand. Wurde jedoch derselbe Ansatz am unteren Ende des Fallrohres bei K angebracht, so erhielt man 0,8248 als Mittelwerth für den betreffenden Ausflußcoefficienten. Im erstern Falle betrug der Barometerstand 333,62 Linien, der Manometerstand 7 Linien, folglich die Quecksilbersaugsäule 326,62 Linien, oder die Wassersäule $\overline{CD} = 4442$ Linien.

Zusatz 4. Die Ergebnisse des Venturi'schen Experimentes c. Zusatz 2 (deren Ursache schon D. Bernoulli *) nachwies) stimmen vollständig mit den unter §. 69 aufgestellten Formeln.

Daselbst findet sich unter (3):

$$\frac{\Pi}{\gamma} = z + \frac{P}{\gamma} - \frac{v^2}{2g}\left(\frac{a^2}{O^2} - \frac{a^2}{A^2}\right).$$

Wird hier $\left(\frac{a}{A}\right)^2$ als klein genug vernachlässigt und der Querschnitt der kleinsten Zusammenziehung des Strahles, Fig. 107, gleich αa genommen, so folgt

$$\frac{\Pi}{\gamma} = \frac{P}{\gamma} + z - \frac{1}{\alpha^2}\frac{v^2}{2g}.$$

Nach §. 73, Seite 168, läßt sich $v = 0,816\sqrt{2gz}$ und $\alpha = 0,64$ setzen, so daß erhalten wird:

$$\frac{\Pi}{\gamma} = \frac{P}{\gamma} + z - (\tfrac{816}{640})^2 z = \frac{P}{\gamma} - 0,626 \,.\, z.$$

Bei dem erwähnten Versuche Venturi's war $z = 32,2$ pariser Zoll, woraus die Saughöhe:

$0,626 \,.\, z = 0,626 \,.\, 32,3 = 20,34$ Zoll folgen würde.

---

*) Hydrodynamica, p. 264.

α den mittleren
, so würde sich

d. i.

Zoll ergab. *)

tzröhren auf die
nicht außerhalb
Innern des Ge-
r den Fall er-
ls berührte. Es
Röhre (à gueule-
beinah auf 0,82

mlich die Ansatz-
evor der Ausfluß-
gefüllt wird, an
durch eine ebene
Zustande das Was-
zu einer nicht zu
r der Ansatzröhre
erauf die von zz
hinweg, so fließt
l contractirt, wie
e Druckhöhe über
g nicht zu gering
jedoch in diesem
dadurch, daß man
yy der Ansatzröhre
man zuerst Luft-
e treten, aufstei-
spiegel WW ent-
erauf die Platte yy
s Wasser in der
lter eine nirgends
bildet, so fließt
völlig ausfüllend,
s.

Fall nicht ein zu-
el für die Gegner
itscoefficienten ab-

In vorbeschriebener Weise hat namentlich Bidone*) Ausflußversuche über nach Innen gerichtete Ansatzröhren angestellt und dabei vorzüglich einen ganz besonderen Einfluß der Wanddicke der Ansatzröhre auf die unter sonst gleichen Umständen ausströmende Wassermenge bemerkt. Die Resultate dieser Versuche enthält folgende Tabelle, in welcher r den innern Radius der cylindrischen Ansatzröhre und e die Wanddicke der Röhre bezeichnet.

Größe der Ausflußcoefficienten μ nach Innen des Ausflußgefäßes gerichteter cylindrischer Ansatzröhren bei			
Nicht gefüllter Röhre		Gefüllter Röhre	
Kleinster Werth von e (beinah Null)	Größter Werth von $e > (\sqrt{2}-1)r$	Kleinster Werth von e (beinah Null)	Größter Werth von $e > (\sqrt{2}-1)r$
$\mu = 0{,}50$	$\mu = 0{,}61$	$\mu = 0{,}7071$	$\mu = 0{,}8125$

Zusatz 6. Ausfluß aus kurzen cylindrischen Ansätzen bei unvollkommener Contraction. Ist der Röhrenquerschnitt a im Verhältniß zum Querschnitt des zufließenden Wasserkörpers im Gefäße sehr groß, d. h. $\frac{a}{A} = n$ ein nicht kleiner echter Bruch, so hat dies, unter sonst gleichen Umständen, eine Vergrößerung des Ausflußcoefficienten zur Folge.

Nach Weisbach's Versuchen**) erhält man in dem gedachten Falle die betreffenden Ausflußcoefficienten μ_n mittelst der Formel:

$$\mu_n = \mu \left\{ 1 + 0{,}1017 \, . \, n + 0{,}0669 \, . \, n^2 + 0{,}0462 \, . \, n^3 \right\},$$

wo μ den Ausflußcoefficienten für die kurze cylindrische Ansatzröhre bei vollkommener Contraction bezeichnet.

Beispielweise sei $n = \frac{a}{A} = 0{,}67$, $\mu = 0{,}82$, so folgt:

$$\mu_{0,67} = 0{,}82\,(1 + 0{,}112) = 0{,}9118.$$

Zusatz 7. Steht die Axe des prismatischen Ansatzes nicht rechtwinklig auf der Wandebene, in welcher die Mündung angebracht ist, sondern schließt diese Axe mit der Normale zur Wandebene an der Einmündung irgend einen Winkel δ ein, so vermindern sich die Ausflußcoefficienten.

*) Memorie etc. di Torino. Tomo XL. Recherches expérim. etc. sur l'écoulement par des tuyaux additionels intérieurs et extérieurs (1831).

**) Untersuchungen, Abtheilung 2, S. 106.

Ebenfalls nach Weisbach's Versuchen *) lassen sich die betreffenden Ausflußcoefficienten mittelst der Formel finden:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1+\eta}}, \text{ wo}$$

$$\eta = 0{,}505 + 0{,}303 \,.\, \sin\delta + 0{,}226 \,.\, \sin\delta^2 \text{ ist.}$$

Für den Fall, daß $\delta = 45^0$ ist, findet man daher $\eta = 0{,}832$ und

$$\mu = 0{,}740.$$

§. 99.

Ausfluß durch kurze conische Ansatzröhren.

Man hat zuerst conisch convergente und conisch divergente Ansatzröhren zu unterscheiden, je nachdem, von der Gefäßwand an gerechnet, vor welcher die Ansätze angebracht sind, die Seitenwände der letzteren zusammenlaufen (convergiren) oder aus einander gehen (divergiren). Wie aus dem Nachfolgenden erhellen wird, sind die ersteren fast allein von practischer Wichtigkeit.

Conisch convergente Ansätze vermehren unter sonst gleichen Umständen den Ausfluß noch mehr als cylindrische, liefern regelmäßige Strahlen, deren Sprungweite (Seite 196), fast dieselbe als beim Ausflusse durch eine dünne Wand ist, d. h. sie vergrößern gegenüber den cylindrischen Ansätzen auch die Ausflußgeschwindigkeiten. Bei dieser Art von Ansätzen tritt daher die Nothwendigkeit der Einführung von Ausflußcoefficienten und Geschwindigkeitscoefficienten am sichtbarsten vor Augen.

Beide Coefficienten hängen hier wesentlich von dem neu hinzugekommenen Elemente, nämlich von dem Convergenzwinkel, d. h. von dem Winkel ab, welchen die beiden Langseiten des trapezförmigen Längenprofiles, durch die Kegelaxe, mit einander bilden.

Die ausgedehntesten und zuverlässigsten Versuche hierüber haben zur Zeit d'Aubuisson und Castel angestellt**), deren Hauptergebnisse in folgender Tabelle zusammeugestellt sind.

---

*) Ing. Mechanik, Bd. 1, §. 360. Zweite Auflage.

**) Annales des Mines (1838), Tom. XIV, p. 187. Hieraus im schönen Auszuge in d'Aubuisson's Hydraulique, §. 49.

Ansatzröhre von 0^m,0155 Durchmesser und 0^m,040 Länge.			Ansatzröhre von 0^m,020 Durchmesser und 0^m,050 Länge.		
Convergenz-Winkel	μ	ψ	Convergenz-Winkel	μ	ψ
0° 0′	0,829	0,830			
1 36	0,866	0,866			
3 10	0,895	0,894	2°50′	0,914	0,906
4 10	0,912	0,910			
5 26	0,924	0,920	5 26	0,930	0,928
7 52	0,929	0,931	6 54	0,938	0,938
8 58	0,934	0,942			
10 20	0,938	0,950	10 30	0,945	0,953
12 4	0,942	0,955	12 10	0,949	0,957
13°24′	0,946	0,962	13°40′	0,956	0,964
14 28	0,941	0,966			
16 36	0,938	0,971	15 2	0,949	0,967
19 28	0,924	0,970	18 10	0,939	0,970
21 0	0,918	0,971			
23 0	0,913	0,974	23 4	0,930	0,973
29 58	0,896	0,975	33 52	0,920	0,979
40 20	0,869	0,980			
48 50	0,847	0,984			

Aus dieser Tabelle geht hervor:

1) daß die Ausflußcoefficienten, für dieselbe Oeffnung und Druckhöhe, anfänglich mit den Convergenzwinkeln wachsen, bei 13 bis 14 Grad ihr Maximum erreichen, sodann aber wieder abnehmen und wahrscheinlich bei 180 Grad wieder die Werthe für die dünne Wand erreichen;

2) daß die Geschwindigkeitscoefficienten bei 0° Convergenz, d. h. bei einer cylindrischen Ansatzröhre, den Ausflußcoefficienten für letztere Arten von Röhren gleich kommen, sodann mit dem Convergenzwinkel wachsen und sich immer mehr der Einheit näheren, bis sie solche (wahrscheinlich) bei 180° Convergenzwinkel erreichen, d. h. der Ansatz wieder in die dünne Wand übergeht.

Bei Gelegenheit genannter Versuche hat man auch die Frage nach der vortheilhaftesten Länge conisch convergenter Ansatzröhren zu beantworten gesucht, ist jedoch zu keinem bestimmten Resultate gelangt. Am Wahrscheinlichsten schien es diese Länge fünf mal so groß als der Mündungsdurchmesser zu setzen. (?)

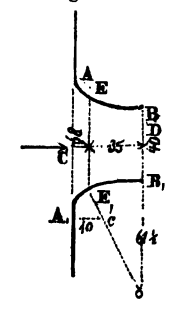
Anmerkung. Die Stelle, wo d'Aubuisson und Castel die Versuche über den Ausfluß aus conisch convergenten Röhren anstellten,

befand sich unten am Thurme der Toulouser Wasserkunst. Die Druckhöhe variirte dabei von $0^m,21$ bis $3^m,03$ (in obiger Tabelle unbeachtet gelassen, weil sich herausstellte, daß die Druckhöhe unter sonst gleichen Umständen ohne Einfluß auf die Größe von μ und ψ war). Die ausfließende Wassermenge wurde in geaichten Gefäßen aufgefangen, die Geschwindigkeit aber aus den Coordinaten der Parabel, welche der fließende Wasserstrahl bildete (§. 87), berechnet.

Zusatz 1. Zu der Gattung der hier betrachteten Ansatzröhren kann man auch die nach der Gestalt des contractirten Wasserstrahles geformten conoidischen Mundstücke zählen.

Nach Michelotti *) sollten, wenn ABB_1A_1, Fig. 113, ein Mundstück letztgedachter Art ist, die Bögen AEB und $A_1E_1B_1$ verlängerte Cycloiden bilden und in dem Falle, daß sich $AA_1 : BB_1 : CD$ wie $23 : 18 : 9$ verhält, die Versuche ergeben haben: $\mu = \psi = 0,9834$.

Fig. 113.

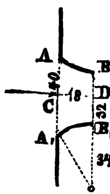


Venturi **) fand, wenn $AA_1 =$ 18 Linien, $BB_1 = 14,3$ Linien und $CD =$ 11 Linien betrug: $\mu = \psi = 0,935$, wobei jedoch die scharfen Ecken bei A und A_1 nicht entfernt waren.

Eytelwein ***) fand, wenn $AA_1 =$ 15 Linien, $BB' = 12$ Linien und $CD =$ 8 Linien groß war, bei nicht abgerundeten Ecken $\mu = \psi = 0,9186$ und wenn die scharfen Ecken entfernt worden waren $\mu = \psi = 0,9798$.

Nach den von Weisbach ****) bei seinen Versuchen angewandten Mundstücken sind unsere Figuren 113 so wie 114 gezeichnet, auch geben die eingeschriebenen Zahlen die Dimensionen derselben in Millimetern an.

Fig. 114.



Bei den weiteren Mundstücken, worunter die mit mittleren Druckhöhen von $0^m,1282$ bis $0^m,5959$ und bei den engeren ebenso von $0^m,1921$ bis $0^m,5766$.

---

*) Hydraulische Versuche, Bd. 1, §. 91 und Anhang §. 24, Seite 247, Exp. XVII.
**) Eytelwein Hydraulik, §. 92 u. 95.
***) Hydraulik, §. 97.
****) Untersuchungen, Abtheilung 2, S. 147.

Der Mittelwerth von $\mu = \psi$ ergab sich zu 0,970 für Fig. 113,
- - - - - - - 0,965 - - 114 *).

Zusatz 2. Die Vortheile convergenter Seitenwände an der Ausflußstelle ergeben sich bereits aus §. 94, sind aber auch speciell für große Düsen (buses pyramidales), welche Wasserrädern Aufschlagwasser zuführten von Lespinasse **), beobachtet wurden. Es bildeten diese Düsen (Lutten) abgekürzte Pyramiden von $2^m,923$ Länge, mit rectangulären Endflächen, wovon die größere $0^m,731$ Breite, $0^m,975$ Länge und die kleinere $0^m,135$ Breite bei $0^m,190$ Länge hatte, die gegenüberliegenden Seiten bildeten Winkel von $11^0\,38'$ und $15^0\,18'$. Die Druckhöhe war constant $2^m,923$. Der kleinste beobachtete Ausflußcoefficient war 0,976, der größte 0,987.

§. 100.

Conisch divergente Ansätze geben im Allgemeinen und unter sonst gleichen Umständen eine kleinere Ausflußmenge als conisch convergente Röhren.

Weiteren Aufschluß hierüber giebt folgende aus den Versuchen Venturi's ***) und Eytelwein's ****) zusammengestellte Tabelle. Bei dem ersteren Experimentator war die Druckhöhe fortwährend die constante von $32\frac{1}{2}$ pariser Zoll, während Eytelwein bei veränderlicher Druckhöhe operirte, wie solches bereits §. 98 Zusatz (1) angeführt worden ist. Alle benannten Zahlenwerthe der Tabelle und zugehörigen Figuren sind bei Venturi in pariser Linien, bei Eytelwein in preußischen Linien ausgedrückt. Mit λ wird allemal eine cylindrische Röhre von 12 Linien innerem Durchmesser bezeichnet. Bei beiden Experimentatoren ist zwischen der Gefäßöffnung und der äußersten Mündung des conischen Ansatzes ein Mundstück nach der Form des zusammengezogenen Strahles, jedoch mit nicht abgerundeten Ecken angebracht.

---

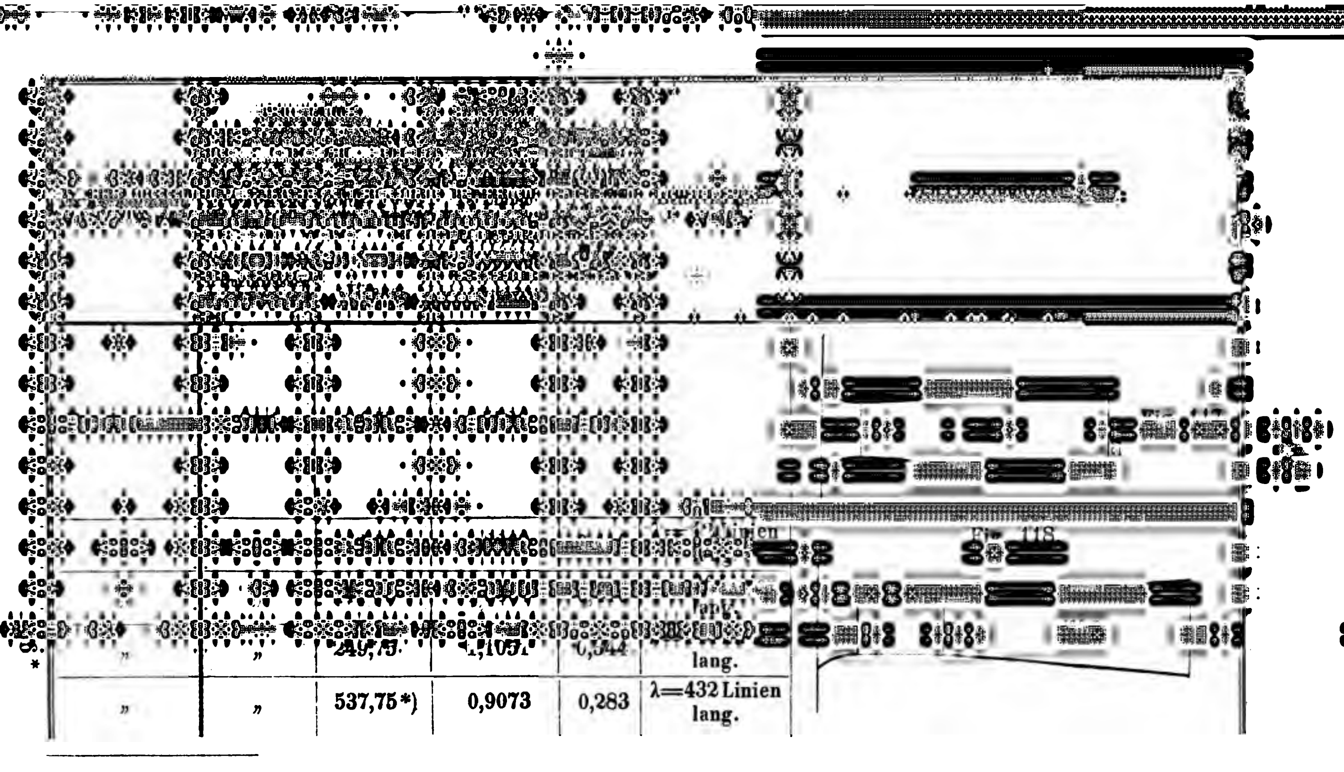
*) Die theoretische Bestimmung der Dimensionsverhältnisse dieser hier erwähnten Mundstücke, respective der Ermittelung der Form des zusammengezogenen Wasserstrahles, haben bisjetzt sämmtlich zu keinem Ziele geführt. Man sehe deshalb die oben (S. 234) erwähnte Abhandlung von Feilitsch, so wie Scheffler „Die Principien der Hydrostatik und Hydraulik" §. 82, ferner auch Bayer in Crelle Journal der Baukunst 1847, S. 131 etc.

**) D'Aubuisson Hydraulique, Nr. 51.

***) Gilb. Annalen, Bd. 2, S. 448.

****) Hydraulik §. 97.

Experimentator.	Dimensionen der conisch divergenten Ansätze		Ausfluß-coefficienten, bezogen auf den Querschnitt von 18 Linien Durchmesser bei Venturi und auf 12 Linien bei Eytelwein	Ausfluß-coefficienten für die äußerste Röhren-mündung	Bemerkungen.	Gestalt der Ansatzröhre.
	Durchmesser der Mündung	Länge				
Venturi . . .	18‴	49‴	0,924	0,924		Fig. 115.
„	23	78	1,016	0,622		Fig. 116.
„	27	148	1,210	0,538	Die Bewegung des Strahles war unregelmäßig.	



„	„	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible] lang.
„	„	537,75*)	0,9073	0,283	λ=432 Linien lang.

*) Eytelwein bemerkt a. a. O. S. 112, daß bei einer 20 Fuß langen Röhre λ und bei stets 3 Fuß Druckhöhe das ausfließende Wasserquantum dasselbe blieb, es mochte das conisch convergente Ansatzrohr vorhanden sein oder nicht; auch war es nicht möglich, zu bewerkstelligen, daß letzteres Rohr vom Wasser ausgefüllt wurde.

Bei dem zweiten Venturi'schen Versuche brachte man in der Weise, wie Fig. 116 zeigt, drei Glasröhren an; die erste *DX* in der Verengung *CD*, in der Entfernung von 26 Linien von ihr und von einander, die *NY* und *OZ*. Die untere Enden dieser drei Röhren mündeten in einem mit Quecksilber gefüllten Gefäße *Q*. Während des Ausfließens stieg das Quecksilber in der Röhre *DX* auf 53, in *NY* auf $20\frac{1}{2}$ und in *OZ* auf 7 Linien Höhe, Erscheinungen, die der in §. 69 aufgestellten Theorie vollkommen entsprechen, vermöge welcher die Pressung des Wassers im Innern der Röhre mit dem Wachsen des Strahlquerschnittes abnimmt. Venturi soll dieses Mittel des Aufsaugens der Flüssigkeiten zur Austrocknung sumpfiger Gegenden bei Modena angewandt haben. *)

§. 101.

Einfluß der Mündungsart auf Geschwindigkeitshöhe und mechanische Arbeit des ausströmenden Wassers.

Bezeichnen wir mit a den Querschnitt der Ausflußmündung, behalten aber sonst die bisherigen Bezeichnungen bei, so ist für die Geschwindigkeit v und Wassermenge Q pr. Secunde zu setzen:

$$v = \psi \sqrt{2gH}, \quad Q = \mu a \sqrt{2gH}.$$

Aus ersterem Werthe ergiebt sich die Geschwindigkeits- oder Steighöhe des Strahles zu

$$\frac{v^2}{2g} = \psi^2 H.$$

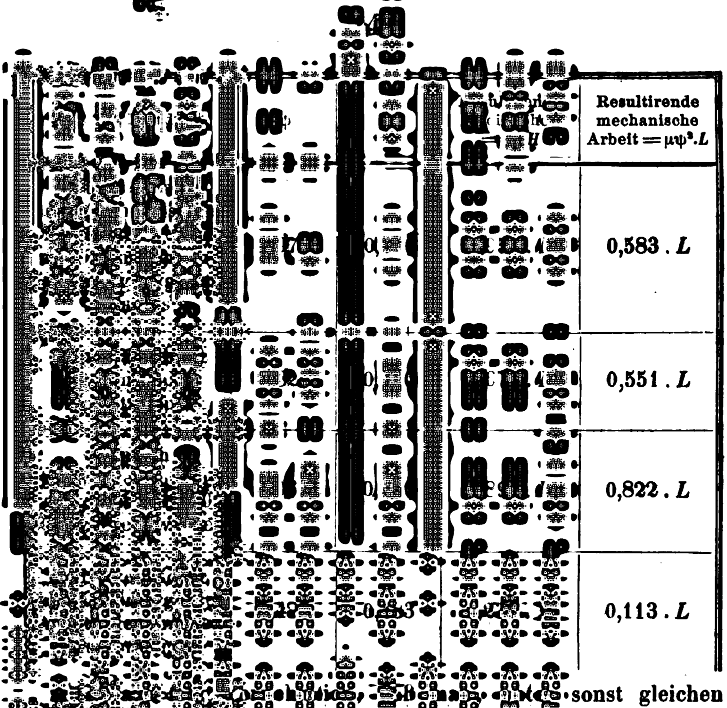
Wird ferner die dem Wasser innewohnende natürliche oder Totalarbeit mit L, die resultirende oder Nutzarbeit mit L_1 bezeichnet, so erhält man noch

$$L_1 = \frac{1}{2} \frac{\gamma Q}{g} v^2 = \mu\psi^2 \gamma a H \sqrt{2gH} = \mu\psi^2 . L.$$

Hiernach läßt sich aus den Ergebnissen der vorhergehenden Paragraphen folgende für die Praxis nicht unwichtige Zusammenstellung machen:

---

*) Munke Handbuch der Naturlehre, Erster Theil, S. 163.



[illegible]	Resultirende mechanische Arbeit $= \mu\psi^2 . L$
[illegible]	0,583 . *L*
[illegible]	0,551 . *L*
[illegible]	0,822 . *L*
[illegible]	0,113 . *L*

[illegible] sonst gleichen [illegible] der Sprunghöhe [illegible] oder geeignete [illegible] größtmöglichen [illegible] te Ansätze mit [illegible] sen müssen.

[illegible]

[illegible] Kante.

[illegible]

[illegible] eines Behälters [illegible] fehlt, oder bei [illegible] uhige Wasser- [illegible] eser Seite liegt, [illegible] rfall genannt. [illegible] es Wassers aus [illegible] Oeffnung senkt [illegible] ntale Wasser- [illegible] einer gewissen [illegible] oder weniger,

so daß der Strahl unmittelbar über der Ausflußkante E bei weitem dünner ist, als an irgend einer anderen Stelle rückwärts von E aus gerechnet.

Nach vorstehender Erklärung wird man die pr. Secunde über einen Ueberfall strömende Wassermenge mittelst der Formel I. Seite 192 berechnen können, sobald man dort h gleich Null setzt und H, als Abstand $\overline{AB}$ des ungesenkten Wasserspiegels von der Abflußkante E, in gehöriger Entfernung (mindestens einen Meter) rückwärts von E mißt. Man erhält also

$$\text{I.}\quad Q = \tfrac{2}{3}\,\mu b \sqrt{2g}\left\{\left(H + \frac{c^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{c^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}.$$

Nimmt man ferner an, daß die Geschwindigkeit c des zufließenden Wassers entweder klein genug ist, um vernachlässigt werden können, oder daß deren Einfluß durch den entsprechend bestimmten Ausflußcoefficienten μ corrigirt werden kann, so ergiebt sich die Formel:

$$\text{II.}\quad Q = \tfrac{2}{3}\,\mu b H \sqrt{2gH}.$$

Anmerkung. Außer den vorstehenden beiden Formeln, wovon die letztere gewöhnlich die Dubat'sche*) genannt wird, hat man auch noch die I. §. 85: $Q = \frac{2}{3}\mu b \sqrt{2g}\left\{H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}\right\}$, wo $h = \overline{CD}$, Fig. 119, so wie II. §. 85: $Q = \mu b (H - h)\sqrt{2g\left(\frac{H+h}{2}\right)}$ und endlich eine von Navier **) vorgeschlagene $Q = 2{,}5261 . \mu . bH^{\frac{3}{2}}$ (für Metermaße) in Anwendung gebracht, wovon jedoch keine den Versuchen gegenüber so wenig abweichende Resultate als die II. liefert, weshalb dieselbe, natürlich auch mit Rücksicht auf ihre Einfachheit, gegenwärtig fast ausschließlich allein angewandt wird.

Wir benutzen jedoch diese Gelegenheit, um auf die höchst interessante Art der Herleitung der Navier'schen Formel (mittelst des sogenannten Principes der kleinsten Wirkung) aufmerksam zu machen.

Ersetzt man in der Gleichung 1) S. 190 h durch x, so ergiebt sich die mittlere Geschwindigkeit zu $\frac{2}{3}\,\frac{H^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{H - x}\sqrt{2g}$, die Wassermenge zu $\frac{2}{3}\,\mu b \sqrt{2g}\left\{H^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right\}$ und daher die dem abfließenden Wasser innewohnende lebendige Kraft, wenn sonst die früheren Bezeichnungen beibehalten werden, zu:

---

*) Principes d'hydraulique, Tome I., §. 142. (Ausgabe von 1816.)

**) Dessen Ausgabe von Bélidor's Architecture hydraulique, Seite 299, Note (*cm*).

$$\tfrac{1}{2} Mv^2 = \tfrac{1}{2} \frac{\gamma}{g} \cdot \tfrac{8}{27} \cdot \mu b \sqrt{(2g)^3} \cdot \frac{[H^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}]^3}{(H-x)^2}.$$

Die Summe der lebendigen Kräfte der Flüssigkeitstheilchen, welche durch den Querschnitt ED, Fig. 119 gehen, ist daher der Function proportional:

$$\frac{(H^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}})^3}{(H-x)^2}.$$

Die erste Ableitung dieses Werthes Null gesetzt, liefert ohne Weiteres die Gleichung:

$$5x^{\frac{3}{2}} - 9Hx^{\frac{1}{2}} + 4H^{\frac{3}{2}} = 0,$$

woraus $x = 0{,}2753 \, . \, H$ folgt, d. h. die Dicke DE des über die Kante E strömenden Strahles wäre 0,7247 oder etwas über $\frac{7}{10}$ der Druckhöhe.

Ferner ist $Q = \tfrac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left\{ H^{\frac{3}{2}} - (0{,}2753 H)^{\frac{3}{2}} \right\}$ u. s. w.

So viel Wahrscheinlichkeit auch die Hypothese für sich hat, welche letzterer Rechnung zu Grunde liegt, so stimmt sio doch eben so wenig mit der Erfahrung, wie neuerdings namentlich von Scheffler [1]) versuchte Modificationen derselben. Der hierbei besonders wichtige Gegenstand, die Strahldicke über der Abflußkante, ist daher bis jetzt nur durch Versuche zu ermitteln gewesen, und zwar neuerdings durch Lesbros mit einer Genauigkeit, welche für die Praxis kaum etwas zu wünschen übrig lassen dürfte. (Man sehe deshalb weiter Unten §. 105.)

§. 103.

Practisch brauchbare Versuche über den Ausfluß bei Ueberfällen sind namentlich angestellt worden von Dubuat [2]), Eytelwein [3]), Bidone [4]), Poncelet und Lesbros [5]), Castel [6]) und Lesbros [7]), endlich neuerdings auch von Weisbach [8]).

Die ausführlichsten dieser Versuche sind zur Zeit die von Lesbros, deren Hauptresultate, so weit sie die Ausflußcoefficienten betreffen, in folgenden beiden Tabellen (auszugsweise) zusammengestellt sind:

---

1) Die Principien der Hydrostatik und Hydraulik, §. 92.
2) Principes d'hydraulique, Nr. 412.
3) Handbuch der Mechanik und Hydraulik, §. 104.
4) Turiner Memoiren, Bd. 28 und hieraus Weisbach in Hülße's Maschinenencyclopädie, Bd. 1, S. 480.
5) Expériences (von 1828) Nr. 110.
6) D'Aubuisson Hydraulique, Nr. 72.
7) Expériences (von 1829—1834), Nr. 281 etc.
8) Ingenieur-Mechanik, Bd. 1, §. 356.

Tabelle

der Ausflußcoefficienten = $\frac{2}{3}\mu$ der Formel $bH\sqrt{2gH}$ für **Ueberfälle** von $0^{m},2$ Breite, mündend in die freie Luft.
(Die Druckhöhen sind gehörig entfernt von der Ueberlaßschwelle gemessen.)

Druckhöhen über der Basis der Abflusskante	Behälter und Ueberfall im Grund- und Aufriß entsprechen Fig. 96 der Anordnung:									
	A, a	*A, b*	*A, c*	*B, a*	*B, d*	*B, e*	*A, d*	*A, e*	*A, f*	*A, g*
Meter										
0,010	0,424	0,431	0,436	0,384	0,362	0,292	0,457	0,457	0,492	0,446
0,015	0,421	0,427	0,432	0,394	0,371	0,305	0,450	0,450	0,481	0,441
0,020	0,417	0,424	0,428	0,402	0,379	0,318	0,446	0,444	0,473	0,437
0,030	0,412	0,418	0,422	0,410	0,388	0,337	0,437	0,435	0,459	0,430
0,040	0,407	0,413	0,416	0,411	0,394	0,352	0,430	0,429	0,449	0,424
0,050	0,404	0,408	0,411	0,411	0,398	0,362	0,425	0,426	0,442	0,419
0‘060	0,401	0,405	0,407	0,410	0,400	0,370	0,420	0,424	0,437	0,416
0,070	0,398	0,403	0,405	0,409	0,402	0,375	0,416	0,422	0,435	0,412
0,080	0,397	0,401	0,402	0,409	0,403	0,379	0,413	0,421	0,434	0,409
0,090	0,396	0,399	0,400	0,409	0,404	0,380	0,411	0,421	0,434	0,407
0,100	0,395	0,398	0,399	0,408	0,405	0,382	0,409	0,420	0,434	0,405
0,120	0,394	0,396	0,396	0,408	0,406	0,383	0,407	0,420	0,434	0,403
0,140	0,393	0,395	0,395	0,408	0,407	0,383	0,407	0,422	0,434	0,403
0,160	0,393	0,394	0,394	0,407	0,407	0,384	0,405	0,424	0,433	0,403
0,180	0,392	0,393	0,393	0,406	0,408	0,383	0,404	0,424	0,432	0,403
0,200	0,390	0,391	0,391	0,405	0,408	0,383	0,402	0,424	0,432	0,403
0,250	0,379	0,383	0,383	0,404	0,407	0,381	0,396	0,422	0,428	0,401
0,300	0,371	0,375	0,375	0,403	0,406	0,378	0,390	0,418	0,424	0,398

Tabelle

der Ausflußcoefficienten = $\frac{2}{3}\mu$ der Formel $bH\sqrt{2gH}$ für **Ueberfälle** von $0^{m},2$ Breite, außerhalb mit offenen, rectangulären Gerinnen von gleicher Breite versehen.
(Die Druckhöhen sind gehörig entfernt von der Ueberlaßschwelle gemessen.)

Druckhöhen über der Basis der Abflusskante	Behälter und Ueberfall entsprechen in Grund- und Aufriß nach Fig. 97 der Anordnung:							
	C, k	*D, k*	*D, m*	*D, n*	*C, m*	*C, n*	*D, p*	*C, E, n* *)
Meter								
0,010	—	—	—	—	0,382	0,395	—	0,406
0,015	—	—	—	—	0,375	0,388	—	0,400
0,020	0,196	0,208	0,201	0,175	0,368	0,383	0,190	0,395
0,030	0,234	0,232	0,228	0,205	0,358	0,373	0,222	0,385
0,040	0,263	0,251	0,250	0,234	0,351	0,365	0,250	0,379
0,050	0,278	0,268	0,267	0,260	0,346	0,360	0,272	0,375
0,060	0,286	0,281	0,280	0,276	0,344	0,355	0,286	0,372
0,070	0,292	0,288	0,289	0,285	0,343	0,352	0,296	0,371
0,080	0,297	0,294	0,295	0,291	0,341	0,349	0,304	0,371
0,090	0,301	0,298	0,300	0,295	0,340	0,347	0,309	0,370
0,100	0,304	0,302	0,304	0,299	0,340	0,345	0,313	0,369
0,120	0,309	0,308	0,310	0,306	0,338	0,343	0,320	0,369
0,140	0,313	0,312	0,314	0,311	0,336	0,341	0,325	0,368
0,160	0,316	0,316	0,317	0,315	0,334	0,340	0,329	0,367
0,180	0,317	0,319	0,319	0,319	0,333	0,339	0,333	0,367
0,200	0,319	0,323	0,322	0,322	0,331	0,338	0,335	0,366
0,250	0,321	0,329	0,326	0,329	0,328	0,336	0,341	0,364
0,300	0,324	0,332	0,329	0,332	0,326	0,334	0,345	0,361

*) Behälter wie bei *C*, dagegen *E* ein Gerinne bezeichnet, welches bei $2^{m},5$ Länge eine Neigung von $\frac{1}{10}$ gegen den Horizont hat.

Beim Gebrauche vorstehender Tabellen hat man wohl in's Auge zu fassen, daß Lesbros Versuchen *) gemäß zwei Classen von Ueberfällen zu unterscheiden sind, je nachdem die Breite der Abflußkante b derselben kleiner oder größer wie $\frac{1}{10}$ der Breite B des Wasserzufuhrcanales ist.

Erste Classe von Ueberfällen, wenn $b < \frac{1}{10} B$, jedoch $b > 0^m,08$ ist. Hierbei sind die Ausflußcoefficienten von den Breiten b und B und deren Verhältnissen ganz unabhängig und ergeben sich entweder unmittelbar aus Columne I der ersten vorstehenden Tabelle, welche der Anordnung A, a, Fig. 96, entspricht, oder man leitet sie durch Interpolation aus der Columne derselben Tabelle ab, welche zur Anordnung B, a, Fig. 96, gehört, je nachdem die Entfernung der Ueberfallskante von dem Boden des Zuflußbehälters größer oder kleiner wie $0^m,54$ ist.

Zweite Classe von Ueberfällen, wenn $b > \frac{1}{10} B$ ist. In diesem Falle hat man die den jedesmaligen Werthen von $\frac{b}{B}$ entsprechenden Ausflußcoefficienten aus der Columne jener Tabelle schätzungsweise zu entnehmen, welche den Anordnungen Ac, Ae und Af, Fig. 96, entsprechen, sobald der Abstand der Abflußkante vom Canalboden gleich oder größer ist wie $0^m,54$. Ist jedoch letztgedachter Abstand kleiner wie $0^m,54$, so sind die Coefficienten aus denen herzuleiten, welche der Anordnung Be verglichen mit Ae, Fig. 96, angehören. **)

Zusatz 1. Zur Beurtheilung des Einflusses der Wanddicke der Ueberfallskante bei Ueberfällen hat Lesbros ebenfalls Versuche angestellt, und zwar mit einer Mündung, wobei die horizontale Basis und die verticalen Seiten gleichmäßig $0^m,05$ Dicke hatten, ferner die Abflußkante eine Breite $b = 0^m,60$ und der Zuflußcanal die Breite $B = 3^m,68$ besaß, die Abflußkante $0^m,54$ vom Canalboden abstand, der Strahl unmittelbar in die freie Luft strömte und die sonstigen Anordnungen der von A, a, Fig. 96, gleich kamen.

Die betreffenden Werthe $\frac{2}{3}\mu$ des Ausflußcoefficienten der Formel $Q = bH\sqrt{2gH}$ enthält folgende Tabelle:

---

*) Lesbros a. a. O., Nr. 306, pag. 245.

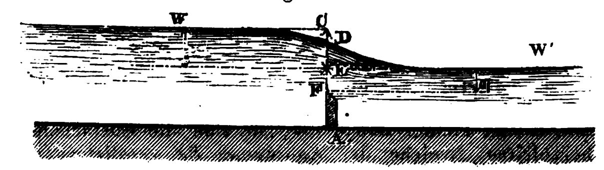
**) Diese unsichere, umständliche Bestimmungsweise der Ausflußcoefficienten für Ueberfälle der zweiten Classe wird durch die Versuche Weisbach's über unvollkommne Contraction völlig beseitigt, wie hinlänglich aus §. 104 erhellt.

***) a. a. O. Nr. 322, pag. 259.

Druckhöhe = H, (weit von der Uebergangskante gemessen)	$0^m,01$	$0^m,02$	$0^m,03$	$0^m,04$	$0^m,05$	$0^m,06$	$0^m,07$	$0^m,08$	$0^m,09$	$0^m,10$	$0^m,12$	$0^m,14$	$0^m,16$
$\frac{2}{3}\mu$	0,424	0,421	0,418	0,416	0,414	0,412	0,410	0,409	0,407	0,406	0,403	0,401	0,399
H	$0^m,18$	$0^m,20$	$0^m,25$	$0^m,30$	$0^m,35$	$0_m,40$	$0^m,45$	$0^m,50$	$0^m,60$	$0^m,70$	$0^m,80$	$0^m,90$	$1^m,00$
$\frac{2}{3}\mu$	0,397	0,395	0,392	0,391	0,391	0,391	0,391	0,391	0,390	0,390	0,390	0,389	0,389

Zusatz 2. Bei unvollkommnen Ueberfällen, d. h. bei solchen, wie Fig. 120, wo der Spiegel des Unterwassers W' über

Fig. 120.



der Ueberfellsschwelle F liegt, läßt sich die pr. Secunde abfließende Wassermenge nach Lesbros Versuchen *) mittelst der Formel berechnen:

$$\text{I.} \quad Q = \mu b H \sqrt{2g\,(H-\eta)},$$

worin H den Abstand $\overline{FC}$ der Abflußkante F vom Oberwasserspiegel, η die Höhe $\overline{EF}$ des Unterwassers W' über der Abflußkante F bezeichnet und μ aus folgender Tabelle zu entnehmen ist.

$\frac{H-\eta}{H}$	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010	0,015	0,020	0,025	0,030	0,035	0,040	0,045	0,050
μ	0,295	0,363	0,430	0,496	0,556	0,597	0,605	0,600	0,596	0,580	0,570	0,557	0,546	0,537	0,531	0,526	0,522
$\frac{H-\eta}{H}$	0,06	0,08	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
μ	0,519	0,517	0,516	0,512	0,507	0,502	0,497	0,492	0,487	0,048	0,474	0,466	0,459	0,444	0,427	0,409	0,390

*) a. a. O., Nr. 310, pag. 249.

Nach Dubuat *) läßt sich der Abfluß des Wassers bei einem vollkommnen Ueberfalle so ansehen, als wenn es von der Höhe *CE* wie über einen vollkommenen Ueberfall strömte und gleichzeitig durch eine unter Wasser gesetzte Mündung *EF* flösse, so daß das gesammte Wasserquantum Q aus zwei Theilen bestehend angenommen werden kann und weshalb zufolge §. 102 und §. 95 für Q ohne Weiteres zu setzen sein würde:

$$\text{II.} \quad Q = \tfrac{2}{3}\mu_1 b(H-\eta)\sqrt{2g(H-\eta)} + \mu_2 b\eta\sqrt{2g(H-\eta)}.$$

Hierbei bezeichnen μ_1 und μ_2 Ausflußcoefficienten, welche den Tabellen §. 103 und §. 95 zu entnehmen sind.

Bis weitere Versuche über diesen Gegenstand entscheiden, möchten wir der Formel I. den Vorzug vor der II. geben. Folgendes Beispiel (nach Eytelwein) **) dürften noch besonders zu beachten sein.

Beispiel. An dem Ausflusse eines See's befindet sich ein 2 Fuß hoher und 10 Fuß breiter unvollkommner Ueberfall ohne Flügelwände. Die Tiefe des Wassers unterhalb des Wehrs ist 3 Fuß, und die Höhe des Aufstaues 4 Fuß; man fragt, wie viel Wasser in jeder Secunde abfließt, wenn mit Eytelwein $\sqrt{2g} = 7{,}9$ (für preußische Maße) und $\mu = \mu_1 = \mu_2 = 0{,}633$ angenommen wird.

Auflösung. Hier ist $\overline{AE} = 3'$, $\overline{AF} = 2'$ folglich $\overline{EF} = \eta = 3 - 2 = 1'$, $\overline{EC} = 4'$, daher $\overline{EC} + \overline{EF} = H = 5'$, daher wie Eytelwein nach Formel II,

$$Q = \mu\sqrt{2g}\left\{\tfrac{2}{3}(H-\eta) + \eta\right\} b\sqrt{H-\eta}, \text{ d. i.}$$

$$Q = 5\left\{\tfrac{2}{3}.4 + 1\right\} 10\sqrt{4} = 366{,}6 \text{ Cubikfuß.}$$

Um nach Lesbros Formel I, zu rechnen, beachte man, daß hier $\frac{H-\eta}{H} = \frac{5-1}{5} = 0{,}8$, also nach letzterer Tabelle $\mu = 0{,}427$ ist. daher auch:

$$Q = 0{,}427 . 10 . 5\sqrt{2g.(5-1)} \text{ und wiederum } \sqrt{2g} = 7{,}9,$$

$$Q = 337{,}33 \text{ Cubikmeter,}$$

d. i. nur 92 Procent des Eytelwein'schen Endresultates.

---

*) Principes d'hydraulique, T. I., §. 146.

**) Handbuch der Mechanik und der Hydraulik, 2. Auflage, Seite 186, §. 139.

§. 104.

Unvollkommene Contraction bei Ueberfällen.

Weisbach hat auch diesen Gegenstand, auf dessen Wichtigkeit bereits im vorigen §. (Note Seite 249) aufmerksam gemacht wurde, zuerst auf eine für die Praxis höchst brauchbare Weise erörtert und die betreffenden Ausflußcoefficienten durch Versuche unter den beiden Bedingungen ermittelt, daß $b < B$ und $b = B$ ist, ferner der Strahl von der Ueberfallskante ab in die freie Luft fließt, also vor der Mündung kein Gerinne angebracht ist.

Bezeichnet nämlich T die Wassertiefe im Zuflußkanale an einer Stelle, wo der Spiegel noch völlig horizontal ist, und werden sonst die bisherigen Bezeichnungen beibehalten, so ist nach Weisbach *)

$$\text{I. } Q = \tfrac{2}{3}\left\{1 + 1{,}718\left(\frac{bH}{BT}\right)^4\right\}\mu_1 bH\sqrt{2gH}, \text{ wenn } b < B,$$

$$\text{II. } Q = \tfrac{2}{3}\left\{1{,}041 + 0{,}3693\left(\frac{H}{T}\right)^2\right\}\mu_2 bH\sqrt{2gH}, \text{ wenn } b = B \text{ ist.}$$

Die mit $\frac{2}{3}$ multiplicirten Werthe der Parenthesen beider Formeln, dieselben respective mit m_1 und m_2 bezeichnet, sind aus der folgenden Tabelle, die für μ_1 und μ_2 aus Tabelle Seite 250 zu entnehmen.

$\frac{bH}{BT}$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	
m_1	1,000	1,000	1,001	1,003	1,007	1,014	1,026	1,044	1,070	1,107	
$\frac{H}{T}$	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
m_2	1,041	1,042	1,045	1,049	1,056	1,064	1,074	1,086	1,100	1,116	1,133

Beispiel. Zur Ermittelung der Wassermenge, welche als Aufschlagwasser für eine Turbine benutzt worden war, hatte Weisbach *) im Abflußgraben des Wassers eine Spundwand einbauen und das Wasser über die nach Außen abgeschrägte Kante wegfließen lassen, wobei die betreffenden Abmessungen folgende waren: $B = 4^m{,}034$, $T = 0^m{,}590$, $b = 3{,}602$, $H = 0^m{,}229$. Wie groß war hiernach die pr. Secunde durch das Rad strömende Wassermenge?

Auflösung. Zuerst berechnet sich

$$\frac{bH}{BT} = \frac{0{,}825}{2{,}380} = 0{,}3465.$$

*) Ingenieur-Mechanik, Bd. 1, §. 356.

**) Polytechn. Centralblatt 1849, S. 1027.

Sodann nach Formel I:

$$1+1{,}718\left(\frac{bH}{BT}\right)=1{,}02472$$

und somit:

$$Q=\tfrac{2}{3}\,\mu_1\,.\,1{,}02472\,.\,0{,}825\sqrt{2gH}.$$

In der ersten Tabelle S. 248 ist der betreffende Werth von μ_1, welcher $H = 0^m{,}229$ entspricht, direct nicht enthalten, weshalb derselbe durch Interpolation und zwar mit Hülfe der sogenannten Newton'schen Formel

$$\mu_1 = y = y_1 + (y_2 - y_1)\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

gesucht werden mag, welcher Formel hier offenbar die Werthe entsprechen:

$x_1 = 0{,}200$	$y_1 = 0{,}390$
$x_2 = 0{,}250$	$y_2 = 0{,}379$
$x(=H) = 0{,}229$	$y(=\mu_1) =$

daher:

$$\mu_1 = 0{,}390 + (0{,}379 - 0{,}390)\frac{0{,}229 - 0{,}200}{0{,}250 - 0{,}200} = 0{,}3836,$$

folglich:

$$Q = 0{,}3836\,.\,1{,}02472\,.\,0{,}825\,.\sqrt{2\,.\,9{,}8088\,.\,0{,}229},\ \text{d. i.}$$

$$Q = 0{,}68735 \text{ Cubikmeter.}$$

Nach Lesbros Angaben im vorigen §. würde die Lösung vorstehender Aufgabe in ziemlich unbestimmter Weise haben geschehen müssen, da der fragliche Ueberfall der Classe $b > \frac{1}{10} B$ angehört.

§. 105.

Dicke des Wasserstrahles in der Ueberfallskantenebene.

Unsere sämmtlichen Formeln zur Berechnung der Ausflußmenge bei Ueberfällen setzen voraus, daß man die Druckhöhe über der Abflußkante an einer Stelle zu messen vermag, wo der Spiegel des zufließenden Wassers noch ganz horizontal ist. Zuweilen ist jedoch die Bestimmung dieser Druckhöhe höchst schwierig oder gar unmöglich und der Practiker dennoch gezwungen, die abfließende Wassermenge berechnen zu müssen.

Da nun die bereits § 102 angeführte, so wie ähnliche andere theoretische Bestimmungsweisen der Senkungsgröße (Depression) des Wasserspiegels in der Ebene des Ueberfalles zu keinem für die Praxis brauchbaren Resultate geführt hat, so ist es nicht genug anzuerkennen, daß Lesbros aus seinen jüngsten Versuchen (abermals) Erfahrungsformeln zu bilden bemüht gewesen ist, welche so lange für das Gebiet der Anwendung willkommen geheißen werden müssen, als es gelingt, der Wahrheit der Sache auf anderem Wege (?) noch näher zu kommen.

In nachstehender Tabelle sind die gedachten Erfahrungswerthe zusammengestellt, wobei B, b und H die bisherigen Bedeutungen haben, η aber die mittlere Dicke des Wasserstrahles in der Ebene des Ueberfalls bezeichnet*), ferner $D^{(A)}$, $D^{(B)}$, $D^{(C)}$ . . . . die Senkungen $H-\eta$ ausdrücken, welche die respective mit (A), (B), (C) . . . . bezeichneten Formeln liefern.

Als Maßeinheit ist überall der Millimeter angenommen.

Werthe des Verhältnisses $\frac{b}{B}$	Erste Classe von Ueberfällen, deren Abflußkante vom Canalboden gänzlich isolirt ist. Mündend in die freie Luft	Außerhalb der Mündung mit einem horizontalen Gerinne versehen
$\frac{b}{B} < 0{,}5$	$\left.\begin{aligned} H-\eta = D^{(A)} &= 0{,}9 + \sqrt{p\eta + 0{,}81} \\ p &= 5{,}428 - (0{,}00173l - 2{,}373)^2 \end{aligned}\right\}$ (A)	$H-\eta = D^C = [1{,}0 - (0{,}00138\eta - 0{,}768)^2]\, D^A$ (C)
$\frac{b}{B} > 0{,}5$	$\left.\begin{aligned} H-\eta &= D^{(B)} = \alpha\eta^2 + \beta\eta - \gamma \\ \alpha &= 0{,}00315\left[\left(\frac{b}{B} - 0{,}656\right)^2 + 0{,}037\right] \\ \beta &= 0{,}89\left[\left(\frac{b}{B} - 0{,}83\right)^2 + 0{,}096\right] \\ \gamma &= 9{,}1\left[\left(\frac{b}{B} - 0{,}98\right)^2 - 0{,}333\right] \end{aligned}\right\}$ (B)	$H-\eta = D^D = \frac{D^B}{1{,}723 + (0{,}00444h - 0{,}607)^2}$ (D)

*) Man erhält diese Dicke, wenn man das Querprofil des Strahles in der Ueberfallskante (wie Fig. 122 zeigt) sorgfältig ermittelt und dessen Flächeninhalt durch die Breite der Ueberfallskante dividirt.

Werthe des Verhältnisses $\frac{b}{B}$	Zweite Classe von Ueberfällen, deren Abflußkante im Niveau des Canalbodens liegt.	
	Mündend in die freie Luft	Außerhalb der Mündung mit einem horizontalen Gerinne versehen
$\frac{b}{B} < 0{,}5$	1) Sobald η oder H 60 oder 78 Millimeter überschreiten $H - \eta = D^E = \frac{0{,}01\,\eta + 15{,}76}{0{,}9 + \sqrt{1{,}319\,\eta + 0{,}81}} . D^A$ (*E*) 2) Sobald η oder H unter 60 oder 78 Millimeter sind $H - \eta = D^{E_1} = [1{,}088 + (0{,}0048\eta - 0{,}979)^2]\, D^A$ (E_1)	$H - \eta = D^G = \frac{0{,}059\,\eta + 4{,}35}{0{,}01\,\eta + 15{,}76} . D^E$ (*G*)
$\frac{b}{B} > 0{,}5$	$H - \eta = D^F = \delta\eta + \varepsilon$ $\delta = 0{,}8276\left[2{,}2782 - \left(\frac{b}{B} - 2{,}0054\right)^2\right]$ $\varepsilon = 404\left[\left(\frac{b}{B} - 0{,}777\right)^2 - 0{,}0377\right]$ (*F*)	$H - \eta = D^H = \frac{0{,}232\,\eta - 1{,}47}{0{,}748 . \eta - 14{,}0} . D^F$ (*H*)

Die Formeln (*A*) und (*B*) sind auf eine große Anzahl von Versuchen verschiedener Beobachter gestützt und können, ganz besonders die erstere, mit Vertrauen benutzt werden. Alle anderen Formeln sind allein auf Lesbros eigene Versuche basirt, besitzen nicht den Character der Allgemeinheit, wie die beiden ersten, und können nur als practische Hülfsmittel, in Ermangelung von etwas Besserem, betrachtet werden. *)

*) Man sehe hierüber Lesbros a. a. O., Nr. 201, S. 155.

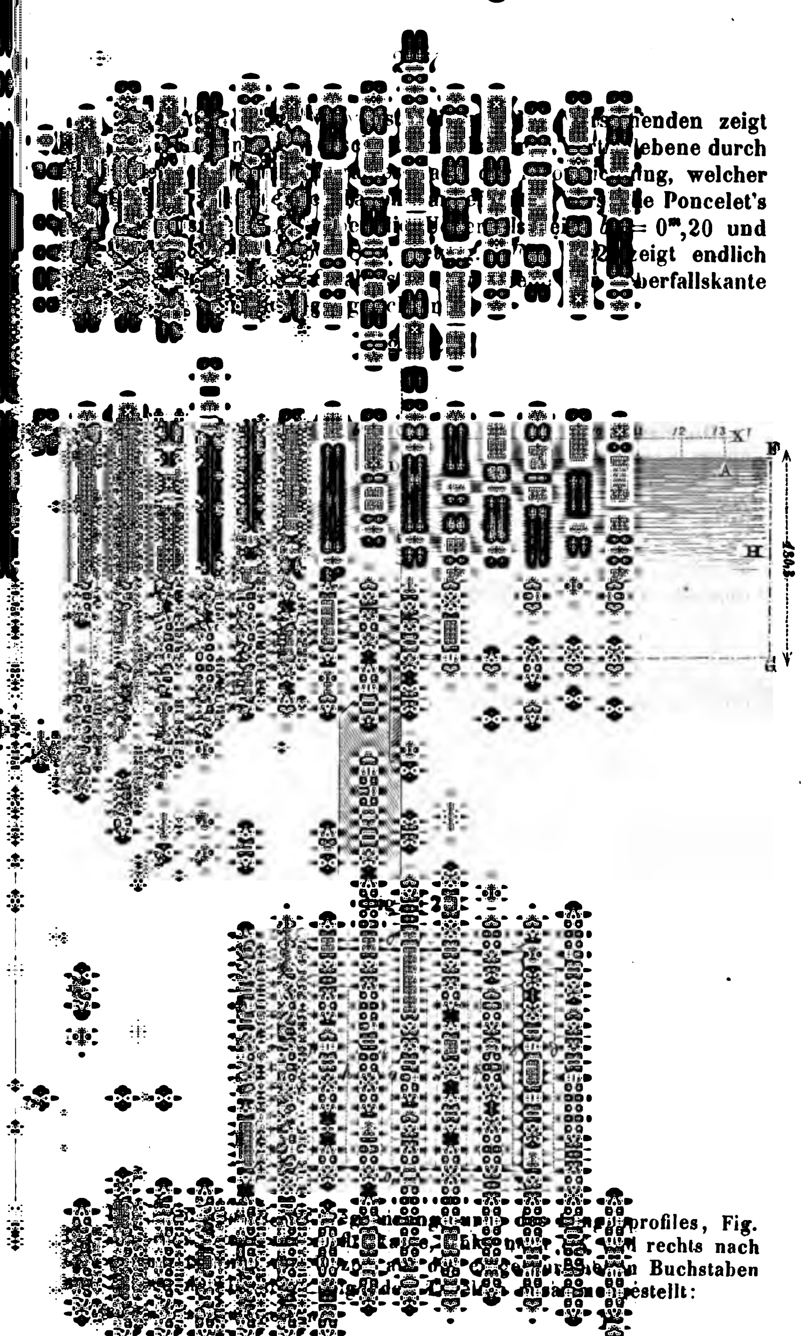


[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Poncelet und Lesbros	200,0	0,0543	1644,0*)	1803,0	1800,5	„	„	1,000	129,70	155,10	155,36

*) Nach sorgfältigen Messungen ergab sich der Querschnitt des Strahles, Fig. 122, in der Ebene der Abflußkante zu: 328,80 Quadratcentimeter. Dividirt man letztere Zahl durch die Breite $0^m,20$ des Ueberfalles, so folgt für die mittlere Dicke des Wasserstrahles: $\frac{32880}{200} = 1644$ Millimeter, wie in der Tabelle.

**) Der erste Versuch entspricht der Anordnung *A, e* Fig. 96, der zweite der von *A, f* Fig. 96.

[illegible] enden zeigt [illegible] ebene durch [illegible] ng, welcher [illegible] e Poncelet's [illegible] $= 0^m,20$ und [illegible] zeigt endlich [illegible] berfallskante [illegible]



[illegible] profiles, Fig. [illegible] rechts nach [illegible] Buchstaben [illegible] estellt:

Ort auf *CX*	*C*	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*k*	*l*	*m*	*n*	*o*
Horizontalabstand von C aus in Millimetern	0,0	20,0	40,0	64,0	90,0	104,0	120,0	150,0	170,0	200,0	220,0	240,0	260,0	280,0	300,0
Vertikalabstand in Millimetern	35,6	40,9	47,7	58,0	73,3	83,4	96,5	123,1	141,7	170,0	191,1	214,4	239,0	264,5	298,4
Ort auf *CX'*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Horizontalabstand von C aus in Millimetern	10,0	30,0	50,0	60,0	80,0	100,0	120,0	140,0	160,0	180,0	220,0	260,0	300	Anfang der Senkung	
Vertikalabstand in Millimetern	33,0	29,8	27,1	26,2	24,5	23,0	22,0	21,3	20,9	20,8	20,2	19,8	19,7		

Obwohl, wie die Coordinaten erkennen lassen, die Begrenzungscurve *ADK* nicht genau eine gemeine Parabel bildet, so kann dies doch für die gewöhnlichsten Fälle der Praxis angenommen, also auch hier die Formeln des §. 87 in Anwendung gebracht werden.

Die Ordinaten des Querprofiles, Fig. 122, des Strahles von der unteren Kante der Mündung aus gerechnet sind mit Bezug auf die eingeschriebenen Buchstaben gedachter Figur folgende:

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*k*	*l*	*m*	*n*	*o*	*p*
181,0	180,5	179,5	178,1	177,7	173,2	165,8	163,8	163,5	163,3	163,5	163,8	164,0	164,2	164,3
q	*r*	*s*	*t*	*u*	*v*	*w*	*x*	*y*	*z*	α	β	γ	δ	s = η
164,4	164,3	164,2	164,0	163,8	163,5	163,3	163,5	163,8	165,8	173,2	177,7	178,1	179,5	181,0

Viertes Kapitel.

Ausfluss des Wassers durch Mündungen in den Seitenwänden der Gefässe bei veränderlicher Druckhöhe.

§. 106.

Unter Voraussetzung einer rectangulären Mündung wie Fig. 86 würde, vom mathematischen Standpuncte aus, zur Berechnung der Ausflußmenge und Zeit der Senkung des Wasserspiegels, bei veränderlicher Druckhöhe, die Gleichung I §. 85 zu Grunde zu legen sein. Für die betreffenden und gewöhnlichen Fälle der Praxis sind jedoch die Mündungshöhen im Verhältniß zu den Druckhöhen meist so niedrig, daß man für den Zweck der gedachten Berechnungen von der Formel II §. 85 ausgehen, d. h. die Schwerpunctsentfernung vom Oberwasserspiegel als Druckhöhe einführen kann. Sodann erhält man aber

77 etc. sind,
rpunct bezieht.
Behälters vom
Senkung von
geren η':

prismatischen
u die Druck-
Mündung, so
der in dt Zeit
$e)^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{3}{2}} \}$ und

nständlich, je-
en.

licher Druck-
tt oder Ueber-
e Senkungszeit
rden:

her Druckhöhe
unregelmäßiger
se gleichzeitig
Abgehandelten
enden Fragen
rten.

ung.

meln des vo-
ssen sich auch
all anwenden,
prünglich lee-
$BCGFE$, Fig.
Theil oder ganz
efüllt wird, daß
sselbe, durch
nmündung L,

Wasser eines zweiten Gefäßes ergießt, in welchem letzteren die Druckhöhe fortwährend dieselbe bleibt. Die Erklärung hierzu ergiebt sich von selbst, wenn man beachtet, daß die Zeit der gedachten Füllung keine andere als die sein kann, welche man beobachtet haben würde, wenn ein gleiches Wasserquantum aus einer Seitenwandöffnung, am Inhalte der von L gleich, des sonst überall verschlossenen Gefäßes $BGFE$ bei abnehmender Druckhöhe ausgeflossen wäre.

Den gemachten Voraussetzungen besonders entsprechend sind die sogenannten einfachen Schifffahrtsschleusen, weshalb auch hier die Zeit zur Anfüllung der Kammer $BGFE$ einer solchen Schleuse berechnet werden mag.

Hierzu bezeichne A den mittleren Querschnitt des auf ein rectanguläres Prisma reducirten Kammerraumes, k die mittlere Tiefe des letzteren vom Schwerpuncte der Schützöffnung L bis zum Boden GF der Kammer gerechnet, ferner η die constante Druckhöhe des Oberwassers und endlich sei a der Flächeninhalt der Mündung L im Oberthore.

Sodann erhält man ohne Weiteres für die Zeit t_1 nach welcher der Raum $LGFM$ vom Boden bis zur Schwerpunctsebene LM der Mündung L gefüllt wird, wegen $Ak = \mu a t_1 \sqrt{2g\eta}$:

$$(1) \quad t_1 = \frac{Ak}{\mu a \sqrt{2g\eta}}.$$

Eben so ergiebt sich die Zeit t_2, binnen welcher der obere Raum $LBEM$ gefüllt wird, zu:

$$(2) \quad t_2 = \frac{2A\sqrt{\eta}}{\mu a \sqrt{2g}} = \frac{2A\eta}{\mu a \sqrt{2g\eta}}.$$

Daher die Zeit T zur vollständigen Füllung der vorher leeren Kammer, aus (1) und (2):

$$\text{I.} \quad T = \frac{A(k+2\eta)}{\mu a \sqrt{2g\eta}}.$$

Die fast unglaublich gute Uebereinstimmung dieser Rechnungen mit der Erfahrung läßt sich u. A. aus einem Versuche Eytelweins *) entnehmen, den derselbe an einer Schleusenkammer des Bromberger Canales anstellen ließ. Dabei war $A = 4284$ rhein. Quadrat-Fuß, $\eta = 7$ Fuß 1 Zoll (man ließ vor der Beobachtung die Kammer erst so weit voll laufen, daß die Schützöffnung vollkommen unter dem

*) Hydraulik §. 120.

Wasserspiegel der Kammer stand, so daß η die Differenz des Ober- und Kammerwassers am Anfange der Beobachtung bezeichnet), $a = 2' \times 1\frac{1}{3}' = \frac{8}{3}$ □ Fuß. Nimmt man nun nach §. 92 $\mu = 0,615$, so erhält man mittelst der Formel (2), wegen $\sqrt{2g} = 7,91$, für preuß. Maße:

$$t_2 = \frac{2.4284.7,083}{0,615.\frac{8}{3}.21,04} = 1758,71 \text{ Secunden.}$$

Die Beobachtung gab 1763 Secunden.

Die Zeit des Leerlaufens der Schleuse berechnet sich, wenn η_1 die Niveau-Differenz des Schleusen- und Außen-Wassers bezeichnet und die Mündungshöhe im Unterthore $= e$, die Mündungsbreite $= b$ ist, sofort nach (2) zu

$$\text{II.} \quad T_1 = \frac{2A\sqrt{\eta_1}}{\mu b e \sqrt{2g}},$$

sobald die Ausflußmündung im Unterthore ganz unter Wasser steht.

Wird dagegen letztgedachte Mündungshöhe e, nur bis zu e_1 Höhe vom Unterwasser bedeckt, d. h. ist der Abstand des Unterwassers von der oberen Mündungskante $= e - e_1$, so berechnet sich die Entleerungszeit T_2 aus der Gleichung:

$$T_2 = \frac{2A\eta_1}{\mu b e_1 \sqrt{2g\eta_1}} + \frac{2A\eta_1}{\mu b (e - e_1)\sqrt{2g[\eta_1 - \frac{1}{2}(e - e_1)]}}, \text{ zu}$$

$$\text{III.} \quad T_2 = \frac{2A\eta_1}{\mu b \sqrt{2g} \left\{ e_1 \sqrt{\eta_1} + (e - e_1)\sqrt{\eta_1 - \frac{1}{2}(e - e_1)} \right\}}.$$

Beispiel. Nach den Angaben d'Aubuisson's*) wurde eine Schleusenkammer des Canals von Languedoc in der Zeit von 5 bis 6 Minuten gefüllt, bei welcher $A = 325,6$ Quadratmeter war und in Bezug auf Fig. 123, die Druckhöhe über dem Mündungsschwerpunct $\eta = 1^m,949$, der Abstand dieses Schwerpunctes vom Unterwasserspiegel d. i. $k = 0^m,325$ und zwei neben einander liegenden Schützenöffnungen 1,2572 Quadratmeter Inhalt hatten. Es fragt sich, wie sich die Füllzeit nach obigen Formeln berechnet?

Auflösung. Man erhält ohne Weiteres nach Formel I, wenn aus Tabelle S. 211 $\mu = 0,595$ gewählt wird:

$$T = \frac{325,6[2.1,949 + 0,325]}{0,595.1,2572\sqrt{2.9,81.1,949}} = 297,2 \text{ Sec.}$$

D'Aubuisson nimmt $\mu = 0,548$ und findet daher:

$$T = 323 \text{ Sec.}$$

---

*) Traité d'hydraulique, §. 97.

Trotzdem letzterer Werth noch besser mit der Beobachtung stimmt als der vorher berechnete, so beruht dennoch die d'Aubuisson'sche Annahme auf Versuchen, deren Resultate etwas bezweifelt werden müssen. Höchst wahrscheinlich ist die Angabe von 5 bis 6 Minuten Füllzeit nicht richtig, was um so wahrscheinlicher ist, als sie nur von Geschichtsschreibern, nicht aber von Hydraulikern angegeben wird. D'Aubuisson verweist daher selbst auf den oben angeführten Versuch Eytelwein's, um den practischen Werth der Formeln vorstehenden Paragraphens zu beurtheilen.

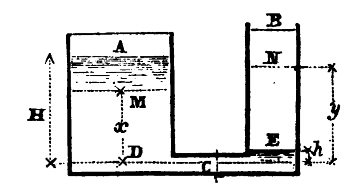
[§. 108.]

Füllzeit der Kammern gekuppelter Schleusen.

Die Resultate des vorstehenden §. sind ganz unbrauchbar für den Fall, daß die Druckhöhe des Speisewassers für das vorher leere Gefäß ebenfalls veränderlich ist, was unter Andern beim Anfüllen hinter einander liegender Schleusenkammmern, oder bei sogenannten gekuppelten Schleusen *) eine practische Anwendung finden kann.

Zur Herleitung der betreffenden mathematischen Ausdrücke für die Füllzeit solcher Schleusen stelle Fig. 124 ABC zwei communicirende Gefäße M und N von prismatischer Form mit den respectiven Querschnitten A und B dar, das Verbindungsgefäß C beider habe den durchaus gleichen Querschnitt a. Ferner sei die anfängliche Druckhöhe im ersten Gefäße H, die variabele daselbst x, die anfängliche Druckhöhe im zweiten Gefäße B sei h, die variabele daselbst $= y$.

Fig. 124.



Sodann erhält man sofort:

$$(1)\quad A dx = -B dy; \quad (2)\quad A dx = -\mu a dt \sqrt{2g}.\sqrt{x-y}.$$

Die Integration beider Werthe liefert, wenn man beachtet, daß für $x = H$ gleichzeitig $y = h$ wird:

$$Ax + By = AH + Bh.$$

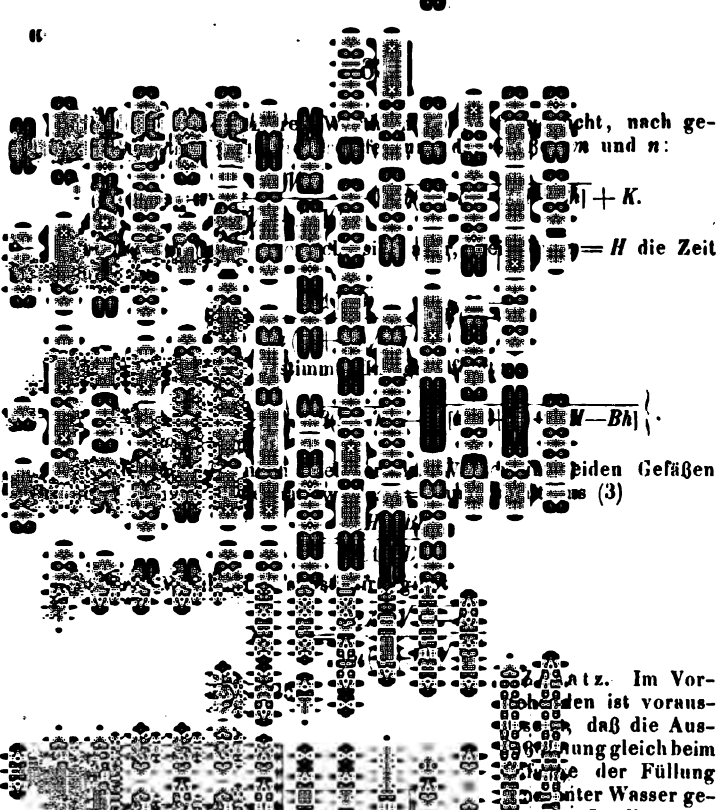
Hieraus ferner:

$$(3)\quad y = \frac{AH + Bh}{B} - \frac{A}{B} x,$$

wofür zur Abkürzung gesetzt werden mag:

$$y =$$

*) Gekuppelte Schleusen werden bei gr… n Gefällen angewandt, um letzteres auf mehrere Schleusen … vertheilen, d. h. für jede einzelne Schleuse das gewöhnlic… Gefälle von 6 bis höchstens 12 Fuß zu erhalten. Hierül… so wie über das Füllen und Leeren der Schleusenkamme… …se man Hagen Wasserbaukunst, 2. Theil, 3. Bd., S. 23 u.



... cht, nach ge-
... m und n:

... $h] + K$.

... $= H$ die Zeit

... $M - Bh]\}$.

... eiden Gefäßen
... s (3)

... atz. Im Vor-
... den ist voraus-
... daß die Aus-
... ung gleich beim
... der Füllung
... nter Wasser ge-
... Ist dies nicht
... steht vielmehr
... erwasser um die
... h_2 unter dem
... puncte C der
... enmündung, so
... n sich die be-
... den Rechnungen
... ermaßen.

... so viel Wasser
... aß der Wasser-
... nung erreicht:

... en ist.
... lcher der den
... hat, weil so-
... H:

...m Füllen, bis das ...cht:

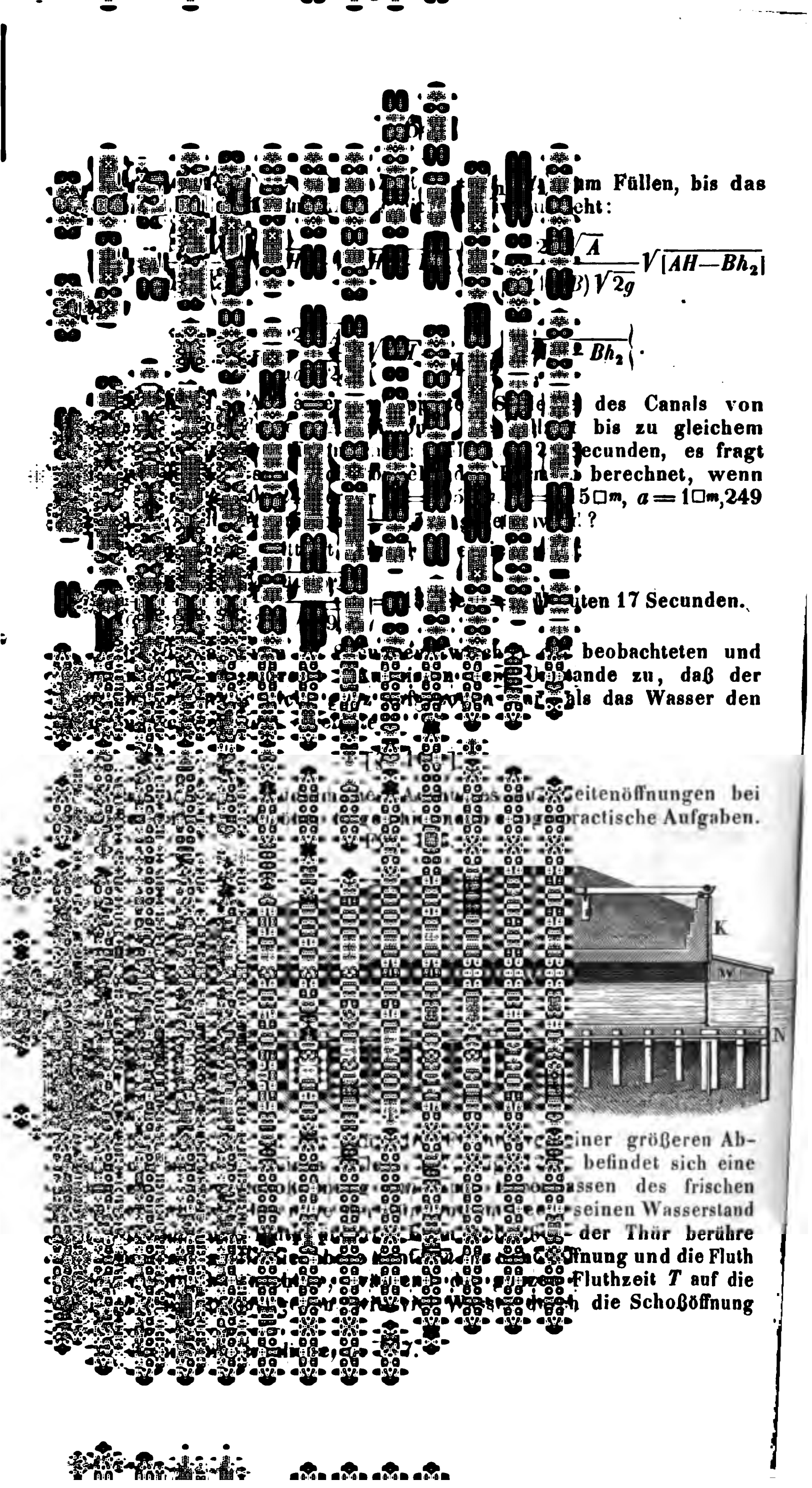
$$\ldots \frac{2\ldots\sqrt{A}}{\ldots B)\sqrt{2g}} \sqrt{AH - Bh_2}$$

$$\ldots Bh_2 \Big\} .$$

... des Canals von ... bis zu gleichem ...ecunden, es fragt ... berechnet, wenn ...5□m, $a = 1$□m,249 ...?

...ten 17 Secunden.

... beobachteten und ...ande zu, daß der ...ls das Wasser den



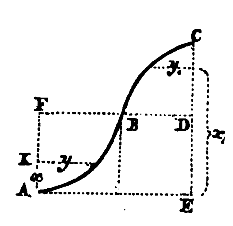
...eitenöffnungen bei ...ractische Aufgaben.

...iner größeren Ab- ... befindet sich eine ...ssen des frischen ... seinen Wasserstand ... der Thür berühre ...fnung und die Fluth ... Fluthzeit T auf die ... die Schoßöffnung

vom Flächeninhalte a (gegen die ganze Thoröffnung sehr gering), während der vollen Fluthzeit ausgeflossen ist, sobald sich das Wasser über eine **sehr große** Binnenlandfläche ungehindert verbreiten kann.

Auflösung. Da das Gesetz des Steigens und Fallens der Fluth und Ebbe an den Meeresküsten und betreffenden Stromstellen, wohin sich Ebbe und Fluth noch erstrecken, fast überall verschieden und insbesondere von der Gestalt der Ufer etc. abhängig ist, so würde die Auflösung unserer Aufgabe die Bekanntschaft einer sogenannten Fluthcurve (Fluthwelle) für den jedesmaligen Ort voraussetzen, aus welcher man die gehörigen Elemente der Rechnung entnehmen müßte. Nimmt man deshalb für gegenwärtigen Zweck an, daß die Fluthcurve aus zwei gemeinen Parabeln AB und BC, Fig. 127, besteht, wovon der Scheitel A der einen im Ebbe-, der der anderen im Fluth-Spiegel liegt *), so gestaltet sich die Rechnung folgendermaßen.

Fig. 127.



Es repräsentire AE die Fluthzeit T, EC die Höhe h vom Schwerpuncte der Oeffnung mn aus gerechnet und der Rechnungsabkürzung wegen werde angenommen, daß beide Parabeläste im Puncte B zusammenstoßen, welcher genau in der halben Höhe h liegt, so daß $DE = \frac{h}{2}$, $BD = \frac{T}{2}$ ist. Hiernach erhält man zunächst für den Parameter p dieser Parabeln $p = \frac{\overline{FB}^2}{AF} = \frac{T^2}{2h}$.

Zur Berechnung der Wassermenge q, welche in der ersten Hälfte der Fluthzeit ins Binnenland fließt, sei ferner $AK = x$ die veränderliche Steighöhe, welche der Zeit $= y$ entspricht. Sodann ist aber $y^2 = px = \frac{T^2}{2h}.x$, $dy = \frac{T}{\sqrt{2h}}.\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ und sonach:

$$dq = \mu a dy \sqrt{2gx}, \text{ d. i.}$$

$$dq = \mu a \frac{T}{2\sqrt{2h}} dx \sqrt{2g} \text{ und}$$

$$(1) \quad q = \mu a \frac{T\sqrt{g}}{2\sqrt{h}} \int_0^{\frac{h}{2}} dx = \frac{\mu a T \sqrt{2gh}}{4\sqrt{2}}.$$

Um eben so eine Gleichung für die Wassermenge q_2 der zweiten Zeithälfte zu erhalten, sei x_1 der veränderliche Wasserstand über dem Schwerpuncte der Mündung mn und y_1 die entsprechende Zeit. Sodann ist: $y_1^2 = p(h - x_1) = \frac{T^2}{2h}(h - x_1)$ und $dy_1 = -\frac{T}{2h}.\frac{dx_1}{2\sqrt{h - x_1}}$,

*) Diese Annahme entspricht so ziemlich der von Hübbe (Reisebemerkungen, Hamburg 1844, S. 41) für Cuxhaven beobachteten Fluthwelle.

oder weil hier y_1 abnimmt, wenn x_1 wächst: $dy_1 = \frac{T}{2h} \cdot \frac{dx_1}{2\sqrt{h-x_1}}$,

daher

$$dq_1 = \mu a dy_1 \sqrt{2gx_1}, \text{ d. i.}$$

$$dq_1 = \frac{\mu a T\sqrt{2g}}{4h} \frac{dx_1 \sqrt{x_1}}{\sqrt{h-x_1}} \text{ und hieraus:}$$

$$q_1 = \frac{\mu a T\sqrt{2g}}{4h} \int_{\frac{h}{2}}^{h} \frac{x_1 dx_1}{\sqrt{hx_1 - x_1^2}} {}^{*)} = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \frac{\mu T\sqrt{2gh}}{4\sqrt{2}}.$$

Sonach die während der ganzen Zeit T ins Binnenland geflossene Wassermenge $= Q$:

$$Q = q + q_1 = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \frac{\mu T\sqrt{2gh}}{4\sqrt{2}}, \text{ oder}$$

$$\text{I.} \quad Q = 0{,}631 \,.\, \mu a T\sqrt{2gh}.$$

Zusatz. Hätte man vorausgesetzt, daß die Fluth in gleichen Zeiträumen auf gleiche Intervalle steigt, so würde man für eine veränderliche Zeit $t < T$ erhalten haben:

$$T : t = h : x \text{ oder } dt = \frac{T}{h} dx.$$

$$dQ = \mu a dt \sqrt{2gx} = \mu a \frac{T}{h} dx \sqrt{2gx} \text{ und}$$

$$Q = \mu a \frac{T}{h} \sqrt{2g} \int_0^h x^{\frac{1}{2}} dx = \tfrac{2}{3} \mu a T\sqrt{2gh},$$

$$\text{II.} \quad Q = 0{,}666 \,.\, \mu a T \sqrt{2gh}.$$

Aus dem Vergleiche von I. und II. dürfte, mindestens für ähnliche practische Fälle, hervorgehen, daß man bei der Schwierigkeit ein mathematisches Gesetz aus der Fluthcurve abzuleiten, welche für einen bestimmten Ort beobachtet wurde, der letzteren Annahme wird folgen können.

[§. 110.]

Aufgabe 2. Es ist die Spühlzeit bei einer Spühlschleuse, Fig. 128 (Längendurchschnitt) und Fig. 129 (Grundriß) **) unter der

---

*) $\int \frac{x_1 dx_1}{\sqrt{hx_1 - x_1^2}} = -\sqrt{hx_1 - x_1^2} + \frac{h}{2} \text{ arc} \left[\cos = \left(\frac{h-2x}{h}\right)\right] + \text{Const.}$

**) Es bezieht sich diese Aufgabe auf die Bremerhafen-Spühlschleuse mit Fächerthoren (Hagen Handbuch der Wasserbaukunst, 2. Theil, 3. Band, S. 300). Die hier am Ende folgenden Zahlenwerthe verdanke ich der Güte des beim Baue beschäftigt gewesenen Ingenieurs Herrn von Kaven.

Fig. 128.

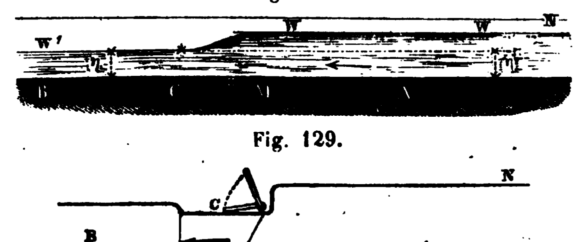


Fig. 129.

Voraussetzung zu berechnen, daß das Wasser (Unterwasser) W' im Vorhafen B fortwährend gleiche Tiefe $= \eta$ behält, der anfängliche Abstand des ungesenkten Oberwasserspiegels W vom Unterwasserspiegel $= h$, am Ende der Spühlzeit dagegen h_1 ist, und bei letzterem Wasserstande das Schließen der Thore erfolgt. Die sogenannte Luftöffnung (Ausflußmündung) der Schleuse habe eine Breite $CC = b$ und das Spühlbassin MN enthalte (unter Voraussetzung prismatischer Form) einen Flächeninhalt von A Quadratfuß. Alle sonstigen Bezeichnungen mögen die bisherigen bleiben.

Auflösung. Setzen wir die veränderliche Wassertiefe des Oberwassers $= x$, die am Anfange des Spühlens $h + \eta$, am Ende $h_1 + \eta$ ist, bezeichnen ferner mit dt ein Element der Spühlzeit, so ist zuerst nach Formel I, S. 250:

$$-A dx = \mu b x \, dt \sqrt{2g(x-\eta)},$$

eine Gleichung, deren bestimmtes Integral zwischen den Grenzen $\eta + h$ und $\eta + h_1$ genommen und auf t reducirt giebt:

$$\text{I.} \quad t = \frac{2A}{\mu b \sqrt{2g\eta}} \left\{ \text{arc} . tg \sqrt{\frac{h}{\eta}} - \text{arc} . tg \sqrt{\frac{h_1}{\eta}} \right\}.$$

Geht man dagegen von Formel II. S. 251 aus, so ist zu setzen:

$$-A dx = \tfrac{2}{3} \mu_1 (x-\eta) \, b dt_1 \sqrt{2g(x-\eta)} + \mu_2 \eta b \, dt_1 \sqrt{2g(x-\eta)}.$$

Für $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ folgt hieraus:

$$dt_1 = \frac{-A dx}{\mu b \sqrt{2g} \left\{ \tfrac{2}{3}(x-\eta)^{\frac{3}{2}} + \eta (x-\eta)^{\frac{1}{2}} \right\}},$$

wovon das bestimmte Integral zwischen den obigen Grenzen ist:

$$\text{II.} \quad t_1 = \frac{A\sqrt{6}}{\mu b \sqrt{2g\eta}} \left\{ \text{arc} . tg \sqrt{\frac{2h}{3\eta}} - \text{arc} . tg \sqrt{\frac{2h_1}{3\eta}} \right\}.$$